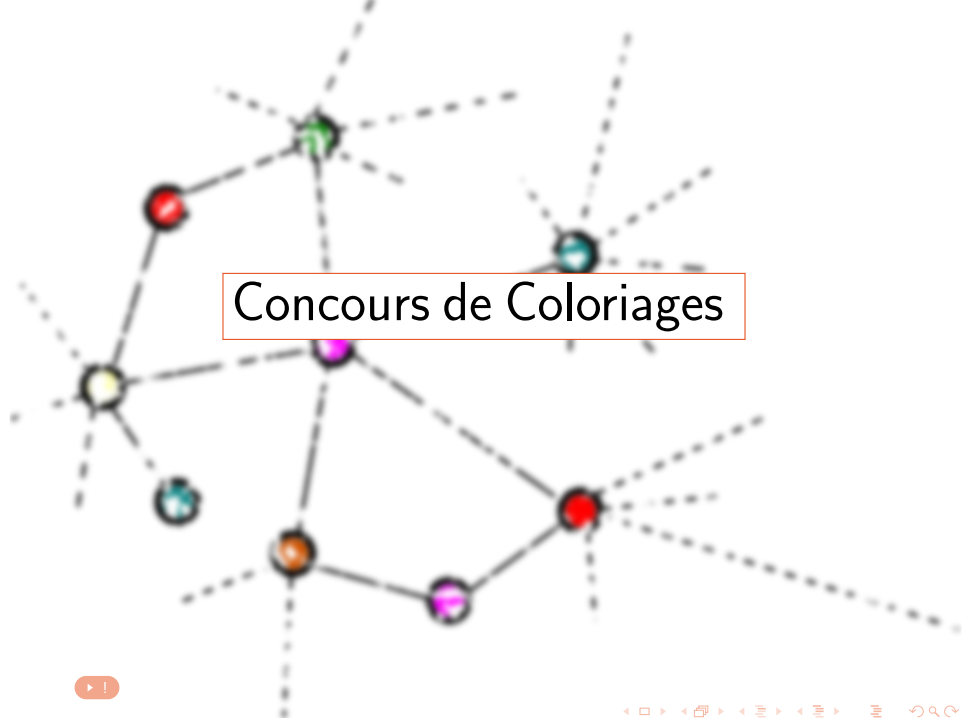


Un Problème de Coloriage de Carte

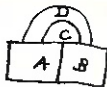


Concours de Coloriages

Le 23 octobre 1852, une lettre du mathématicien Auguste de Morgan à son confrère Sir William Rowan Hamilton.

A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that, if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted but not more - The following is his case in which four are wanted

A B C &c are names of colours



Query cannot a necessity for five a more be invented

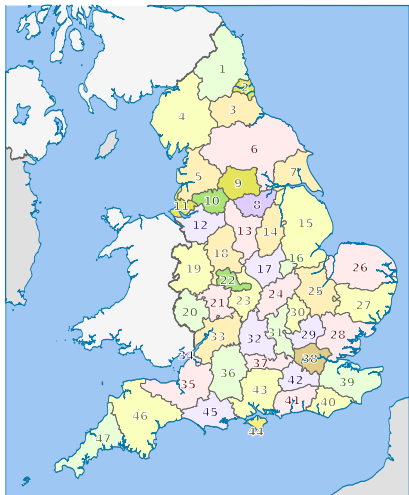
Un de mes étudiants m'a demandé aujourd'hui de lui donner une raison pour un fait que je ne savais pas comme étant un fait - et ne le sais toujours pas. Il dit que peu importe comment une figure est découpée et ses compartiments coloriés de sorte que des compartiments avec une ligne commune soient différemment coloriés - quatre couleurs peuvent être utiles mais pas plus - ...



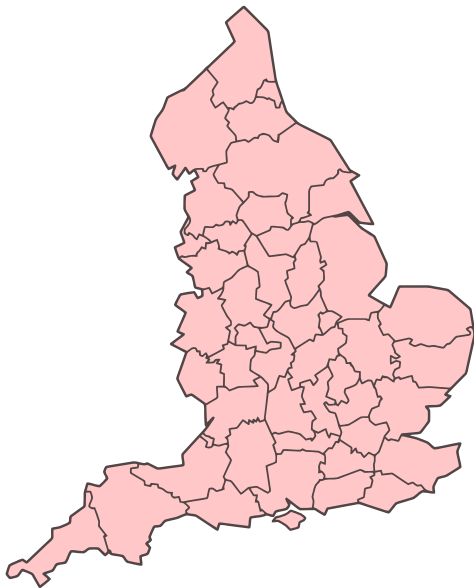
Auguste de Morgan (1806 - 1871)

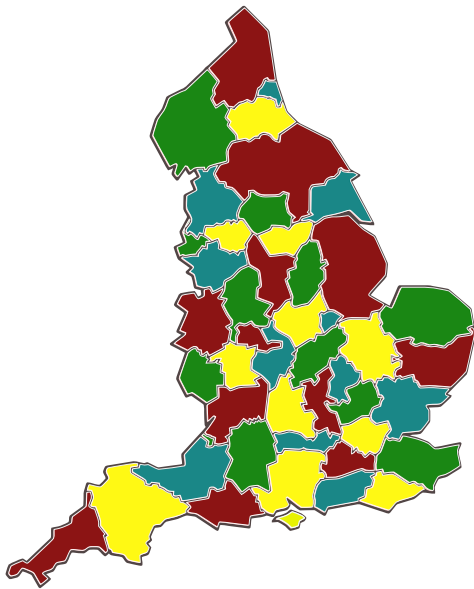


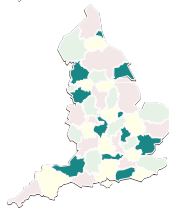
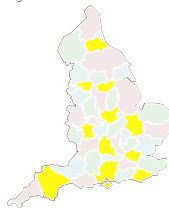
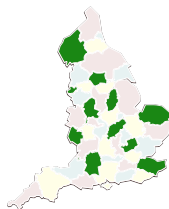
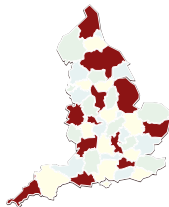
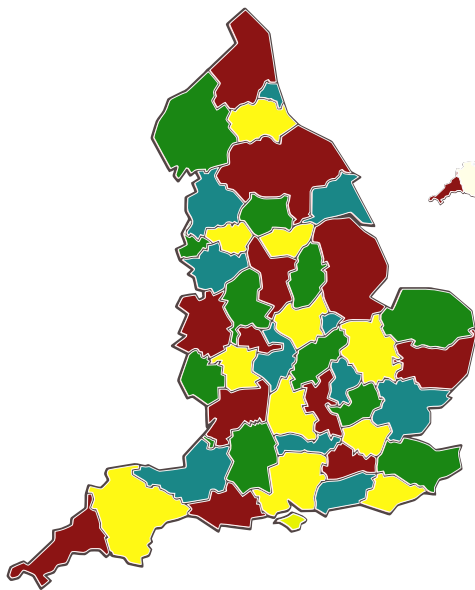
Francis Guthrie (1831 - 1899)

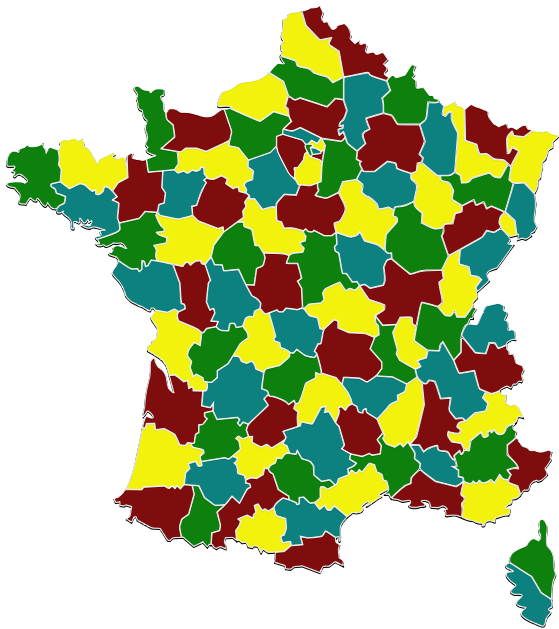


- | | |
|-----------------------------|---------------------|
| 1. Northumberland | 25. Cambridgeshire |
| 2. Tyne and Wear | 26. Norfolk |
| 3. County Durham | 27. Suffolk |
| 4. Cumbria | 28. Essex |
| 5. Lancashire | 29. Hertfordshire |
| 6. North Yorkshire | 30. Bedfordshire |
| 7. East Riding of Yorkshire | 31. Buckinghamshire |
| 8. South Yorkshire | 32. Oxfordshire |
| 9. West Yorkshire | 33. Gloucestershire |
| 10. Greater Manchester | 34. Bristol |
| 11. Merseyside | 35. Somerset |
| 12. Cheshire | 36. Wiltshire |
| 13. Derbyshire | 37. Berkshire |
| 14. Nottinghamshire | 38. Greater London |
| 15. Lincolnshire | 39. Kent |
| 16. Rutland | 40. East Sussex |
| 17. Leicestershire | 41. West Sussex |
| 18. Staffordshire | 42. Surrey |
| 19. Shropshire | 43. Hampshire |
| 20. Herefordshire | 44. Isle of Wight |
| 21. Worcestershire | 45. Dorset |
| 22. West Midlands | 46. Devon |
| 23. Warwickshire | 47. Cornwall |
| 24. Northamptonshire | |









Conjecture des 4 couleurs

La conjecture (Guthrie, 1852) :

Il suffit de quatre couleurs pour colorier n'importe quelle carte de sorte que deux régions limitrophes soient toujours de couleurs différentes.

Conjecture des 4 couleurs

La conjecture (Guthrie, 1852) :

Il suffit de quatre couleurs pour colorier n'importe quelle carte de sorte que deux régions limitrophes soient toujours de couleurs différentes.

Précisions :

- ▶ Qu'est-ce-qu'une carte ?
 - ▶ Les pays sont **connexes**.
 - ▶ Deux régions seulement en contact par un point ne sont pas limitrophes. Pourquoi ?

Comment peut-on montrer que la conjecture est vraie ou bien montrer que la conjecture est fausse ?

Chronologie rapide

- ▶ Pendant 25 ans : Rien.

Chronologie rapide

- ▶ Pendant 25 ans : Rien.
- ▶ En 1879, Arthur Bray Kempe publie une démonstration de la conjecture qui fut reçue favorablement.



Kempe (1849 - 1922)

Chronologie rapide

- ▶ Le problème devient célèbre et les plus grands mathématiciens s'y attaquent sans succès : G.D. Birkhoff (1912,1913) $N=17$; Ph. Franklin (1922) $N=22$; C.N. Reynolds (1926) $N=26$; C.E. Winn (1938) $N=36$; H. Lebesgue (1940) ;

Chronologie rapide

- ▶ Le problème devient célèbre et les plus grands mathématiciens s'y attaquent sans succès : G.D. Birkhoff (1912,1913) $N=17$; Ph. Franklin (1922) $N=22$; C.N. Reynolds (1926) $N=26$; C.E. Winn (1938) $N=36$; H. Lebesgue (1940) ;
- ▶ Contributions importante de Heinrich Heesch (entre 1936 et 1975).



Heesch (1906 - 1995)

Chronologie rapide

- ▶ Enfin une démonstration ! En 1976, Kenneth Appel et Wolfgang Haken publie une démonstration définitive qui repose sur des calculs effectués par ordinateur, ce qui divise la communauté mathématique.



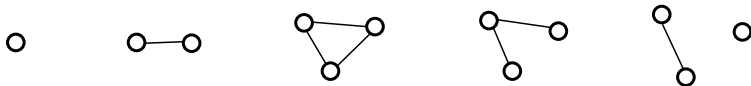
Appel (1932 - 2013) Haken (1928 -)

Lien avec la théorie des graphes !

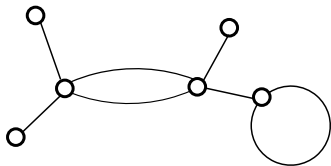
Qu'est qu'un graphe ?

Un graphe est un ensemble de sommets, deux à deux reliés ou non par une arête.

Par exemple :

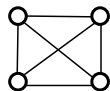
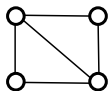
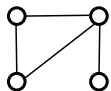
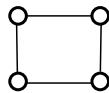
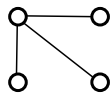
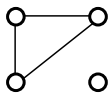
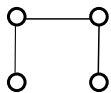
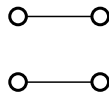
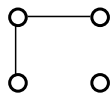
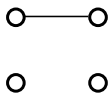
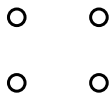


Mais pas :



Combien y-a-t'il de graphes à 4 sommets ? à n sommets ?

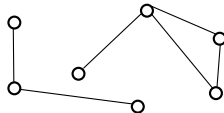
Les 11 graphes à 4 sommets



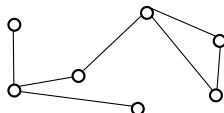
Graphes connexes

Un graphe est dit **connexe** si tout sommet peut être relié à tout autre sommet par une succession d'arêtes.

pas connexe :

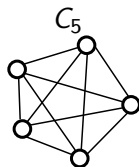
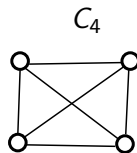
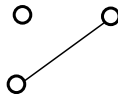
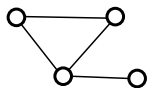


connexe :



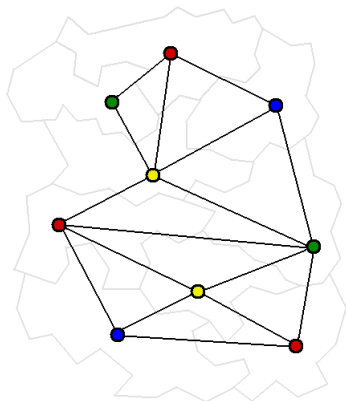
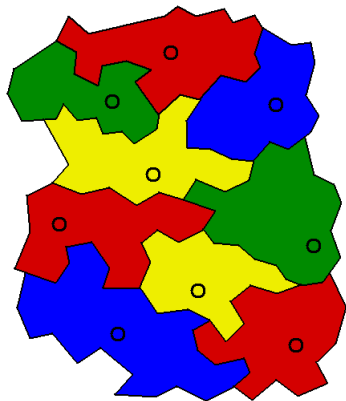
Graphes planaires

Un graphe est dit **planair**e s'il existe une façon de le représenter (dans le plan) sans qu'aucune arête ne se croise.



sont-ils planaires ?

Lien : Carte $\leftrightarrow$ Graphe planaire



La conjecture des quatre couleurs

On appelle coloriage d'un graphe un coloriage des sommets tel que deux sommets reliés par une arête soient toujours de couleurs différentes.

La conjecture :

Tout graphe planaire est coloriable avec au plus 4 couleurs.

Pour un graphe planaire G , on note S est le nombre de Sommets, A est le nombre d'Arêtes et Z le nombre de Zones (y compris la zone extérieure).

En essayant plusieurs graphes planaires connexes, que remarque-t-on ?

Formule d'Euler

Dans tout graphe planaire
connexe,

$$S - A + Z = 2$$

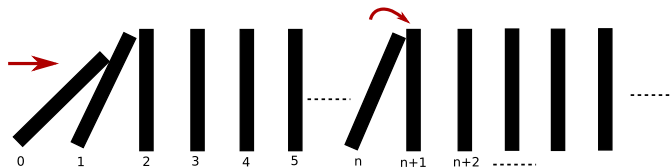


Leonhard Euler (1707-1783)

où S est le nombre de Sommets, A est le nombre d'Arêtes et Z le nombre de Zones.

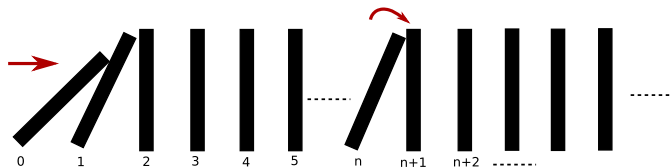
Démonstration de la formule d'Euler $S - A + Z = 2$

- Principe de récurrence.



Démonstration de la formule d'Euler $S - A + Z = 2$

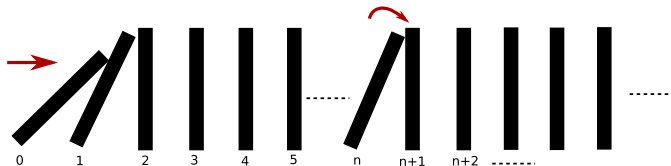
- ▶ Principe de récurrence.



- ▶ Vrai pour les graphes planaires connexes à 0 arête.

Démonstration de la formule d'Euler $S - A + Z = 2$

- ▶ Principe de récurrence.



- ▶ Vrai pour les graphes planaires connexes à 0 arête.
- ▶ Si Vrai pour les graphes planaires connexes à n arêtes,
Alors Vrai pour les graphes planaires connexes à $n + 1$ arêtes $\square$

Une remarque

Dans tout graphe planaire connexe (ayant au moins 2 arêtes), on a

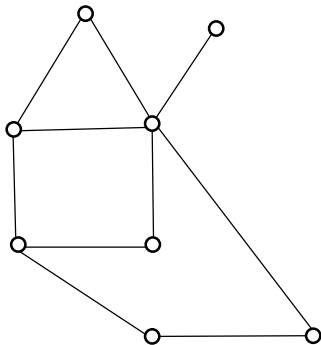
$$2A \geq 3Z$$

Une remarque

Dans tout graphe planaire connexe (ayant au moins 2 arêtes), on a

$$2A \geq 3Z$$

En effet,

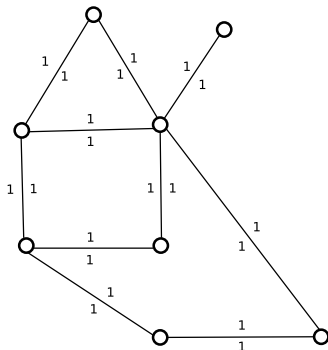


Une remarque

Dans tout graphe planaire (ayant au moins 2 arêtes), on a

$$2A \geq 3Z$$

En effet,

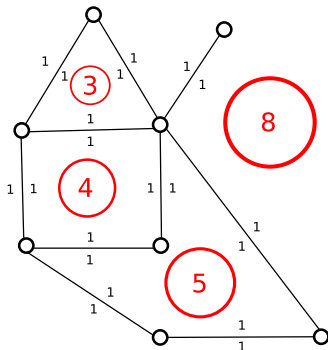


Une remarque

Dans tout graphe planaire (ayant au moins 2 arêtes), on a

$$2A \geq 3Z$$

En effet,

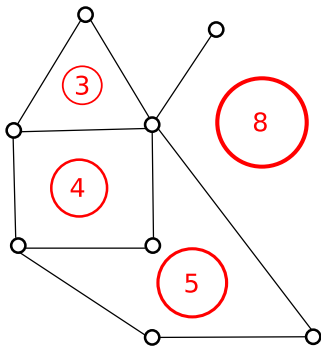


Une remarque

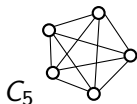
Dans tout graphe planaire (ayant au moins 2 arêtes), on a

$$2A \geq 3Z$$

En effet,

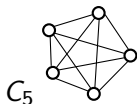


Une conséquence de la formule d'Euler



n'est pas planaire (... réponse aux 5 princes).

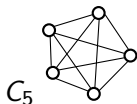
Une conséquence de la formule d'Euler



n'est pas planaire (... réponse aux 5 princes).

En effet, si C_5 était planaire :

Une conséquence de la formule d'Euler

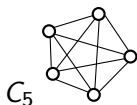


n'est pas planaire (... réponse aux 5 princes).

En effet, si C_5 était planaire :

- ▶ D'une part, $S = 5$ et $A = 10$, donc $Z = 7$.

Une conséquence de la formule d'Euler

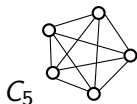


n'est pas planaire (... réponse aux 5 princes).

En effet, si C_5 était planaire :

- ▶ D'une part, $S = 5$ et $A = 10$, donc $Z = 7$.
- ▶ D'autre part, $3Z \leq 2A$ et $2A = 20$, donc $Z \leq \frac{20}{3} = 6,666\dots$

Une conséquence de la formule d'Euler



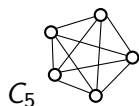
n'est pas planaire (... réponse aux 5 princes).

En effet, si C_5 était planaire :

- ▶ D'une part, $S = 5$ et $A = 10$, donc $Z = 7$.
- ▶ D'autre part, $3Z \leq 2A$ et $2A = 20$, donc $Z \leq \frac{20}{3} = 6,666\dots$

C'est contradictoire ! $\square$

Une conséquence de la formule d'Euler



n'est pas planaire (... réponse aux 5 princes).

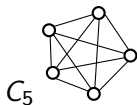
En effet, si C_5 était planaire :

- ▶ D'une part, $S = 5$ et $A = 10$, donc $Z = 7$.
- ▶ D'autre part, $3Z \leq 2A$ et $2A = 20$, donc $Z \leq \frac{20}{3} = 6,666\dots$

C'est contradictoire ! $\square$

... et le graphe $C_{3,3}$?

Une conséquence de la formule d'Euler



n'est pas planaire (... réponse aux 5 princes).

En effet, si C_5 était planaire :

- ▶ D'une part, $S = 5$ et $A = 10$, donc $Z = 7$.
- ▶ D'autre part, $3Z \leq 2A$ et $2A = 20$, donc $Z \leq \frac{20}{3} = 6,666\dots$

C'est contradictoire ! $\square$

... et le graphe $C_{3,3}$? ▶ end

Une autre conséquence de la formule d'Euler

Théorème des cinq voisins

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet qui ne possède pas plus de 5 voisins.

Une autre conséquence de la formule d'Euler

Théorème des cinq voisins

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet qui ne possède pas plus de 5 voisins.

Démonstration :

Une autre conséquence de la formule d'Euler

Théorème des cinq voisins

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet qui ne possède pas plus de 5 voisins.

Démonstration :

- ▶ On a vu que $2A \geq 3Z$.

Une autre conséquence de la formule d'Euler

Théorème des cinq voisins

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet qui ne possède pas plus de 5 voisins.

Démonstration :

- ▶ On a vu que $2A \geq 3Z$.
- ▶ Supposons qu'il existe un graphe planaire tel que tout les sommets aient au moins 6 voisins. Alors $2A \geq 6S$.

Une autre conséquence de la formule d'Euler

Théorème des cinq voisins

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet qui ne possède pas plus de 5 voisins.

Démonstration :

- ▶ On a vu que $2A \geq 3Z$.
- ▶ Supposons qu'il existe un graphe planaire tel que tous les sommets aient au moins 6 voisins. Alors $2A \geq 6S$.
- ▶ Par la formule d'Euler,

$$2 = S - A + Z$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{1}{3}A - A + \frac{2}{3}A$$

$$\Rightarrow 2 \leq 0.$$

Une autre conséquence de la formule d'Euler

Théorème des cinq voisins

Dans tout graphe planaire, il existe un sommet qui ne possède pas plus de 5 voisins.

Démonstration :

- ▶ On a vu que $2A \geq 3Z$.
- ▶ Supposons qu'il existe un graphe planaire tel que tous les sommets aient au moins 6 voisins. Alors $2A \geq 6S$.
- ▶ Par la formule d'Euler,

$$\begin{aligned}2 &= S - A + Z \\ \Rightarrow 2 &\leq \frac{1}{3}A - A + \frac{2}{3}A \\ \Rightarrow 2 &\leq 0.\end{aligned}$$

- ▶ Absurde !

Théorème des six couleurs

Théorème des six couleurs

Il suffit de six couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

Théorème des six couleurs

Théorème des six couleurs

Il suffit de six couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

Démonstration : Par récurrence sur le nombre S de sommet

Théorème des six couleurs

Théorème des six couleurs

Il suffit de six couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

Démonstration : Par récurrence sur le nombre S de sommet

- Pour $S = 1$, facile !

Théorème des six couleurs

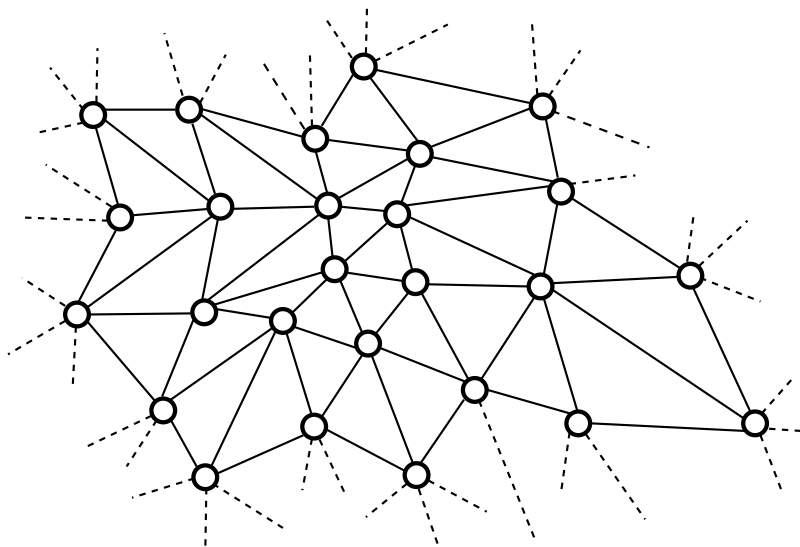
Théorème des six couleurs

Il suffit de six couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

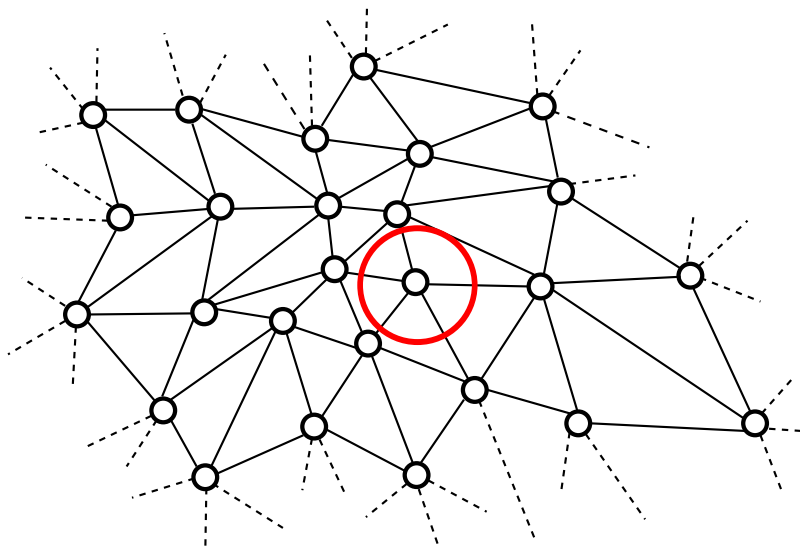
Démonstration : Par récurrence sur le nombre S de sommet

- ▶ Pour $S = 1$, facile !
- ▶ Supposons que tous les graphes à n sommets sont coloriables avec six couleurs. Soit G un graphe à $n + 1$ sommets.

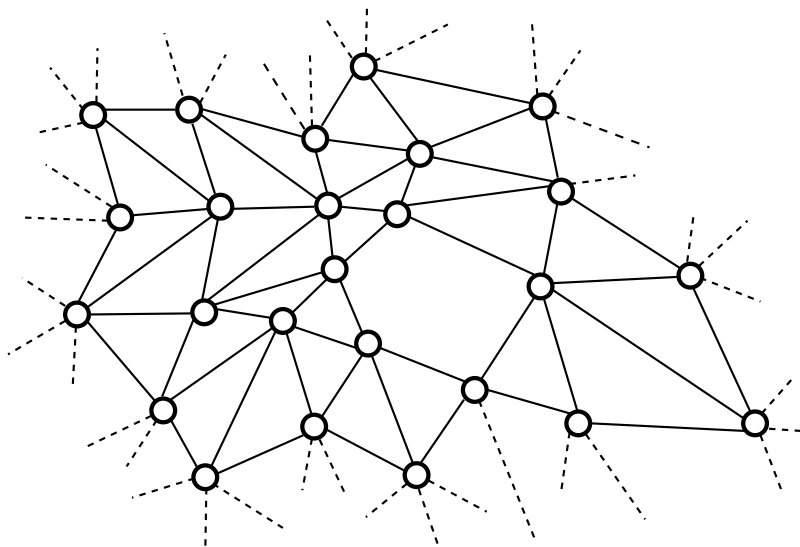
Théorème des six couleurs



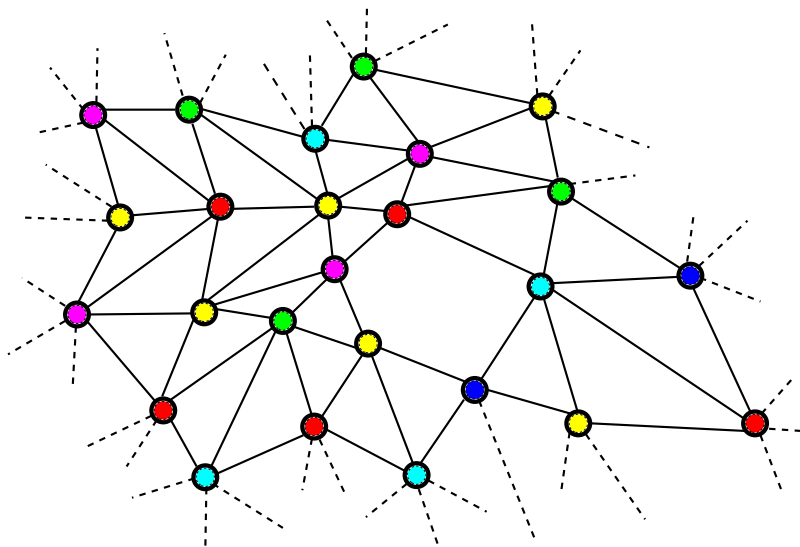
Théorème des six couleurs



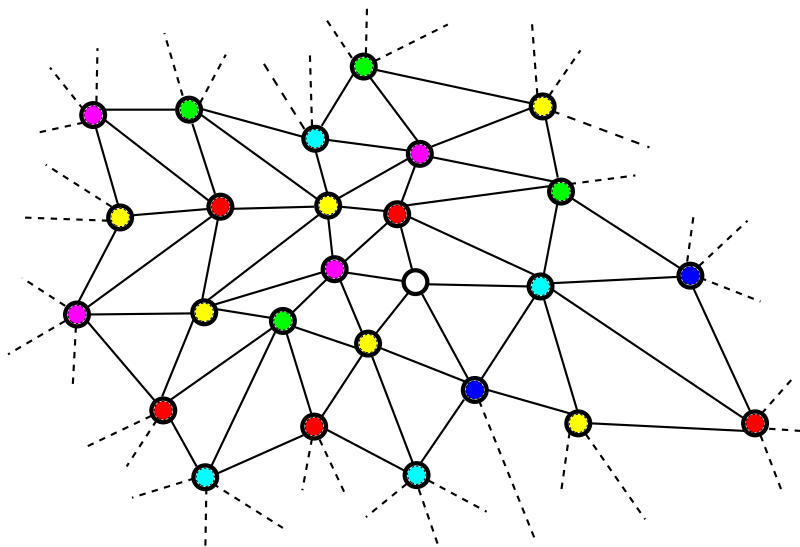
Théorème des six couleurs



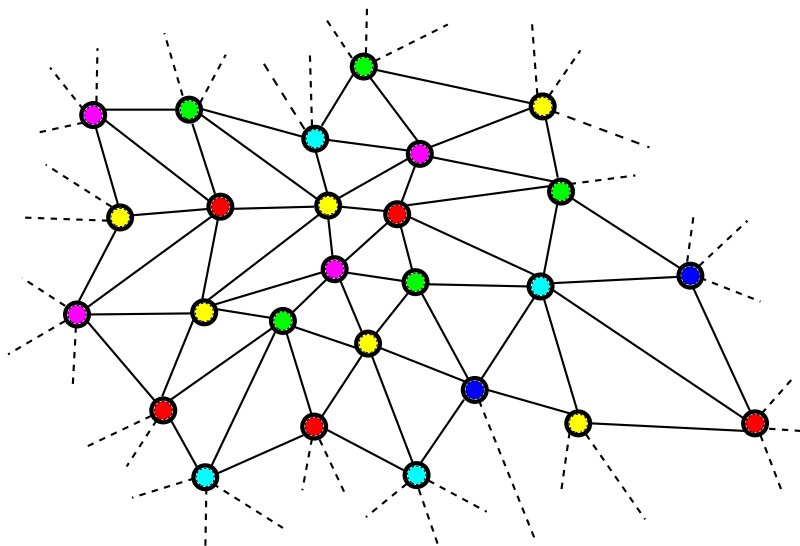
Théorème des six couleurs



Théorème des six couleurs



Théorème des six couleurs



Théorème des six couleurs



Théorème des cinq couleurs

Théorème des cinq couleurs (Kempe, 1879, Heawood, 1890)

Il suffit de cinq couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

Théorème des cinq couleurs

Théorème des cinq couleurs (Kempe, 1879, Heawood, 1890)

Il suffit de cinq couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

Démonstration : Par récurrence sur le nombre S de sommet

Théorème des cinq couleurs

Théorème des cinq couleurs (Kempe, 1879, Heawood, 1890)

Il suffit de cinq couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

Démonstration : Par récurrence sur le nombre S de sommet

- ▶ $S = 1$, facile !

Théorème des cinq couleurs

Théorème des cinq couleurs (Kempe, 1879, Heawood, 1890)

Il suffit de cinq couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

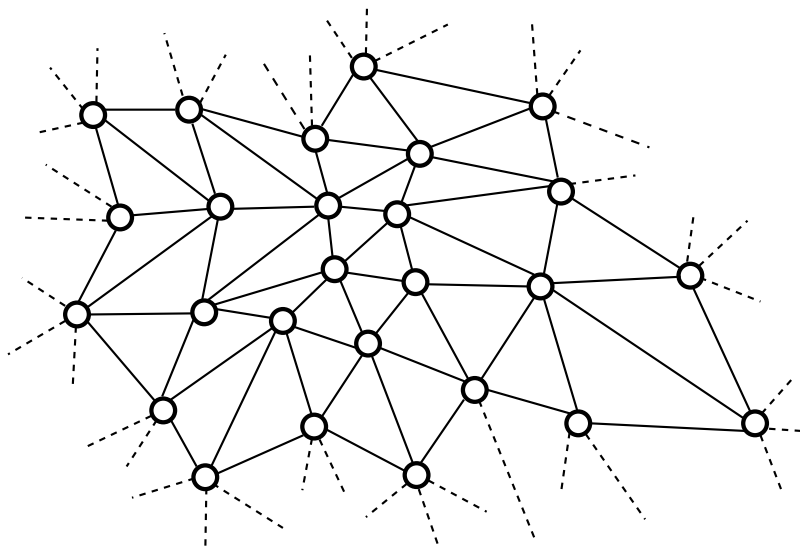
Démonstration : Par récurrence sur le nombre S de sommet

- ▶ $S = 1$, facile !
- ▶ Supposons que tous les graphes à n sommets sont coloriables avec cinq couleurs. Soit G un graphe à $n + 1$ sommets.

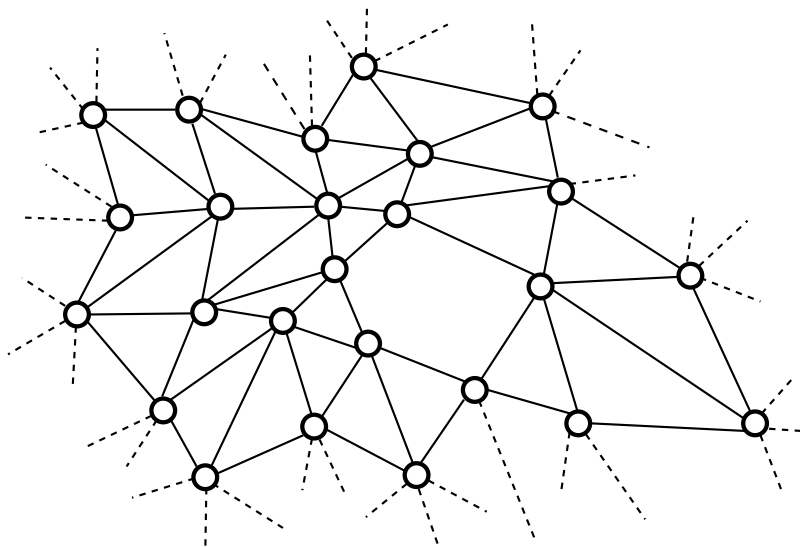
Théorème des cinq couleurs

1er cas

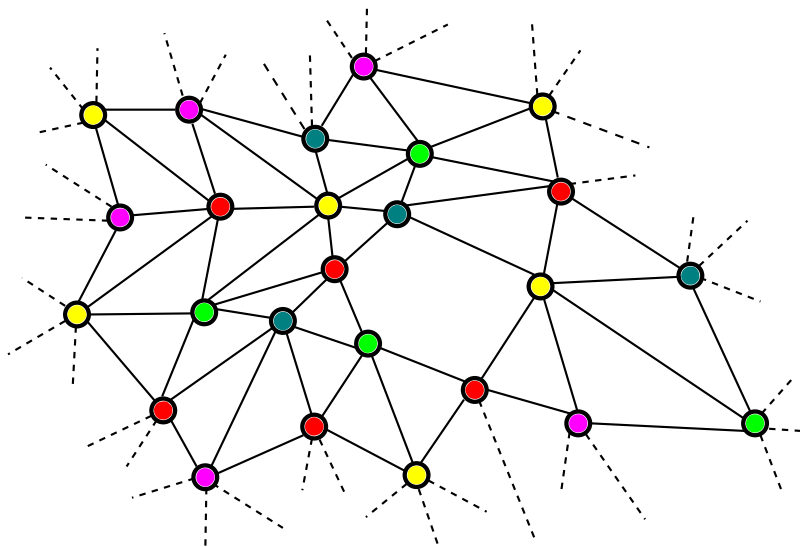
Théorème des cinq couleurs



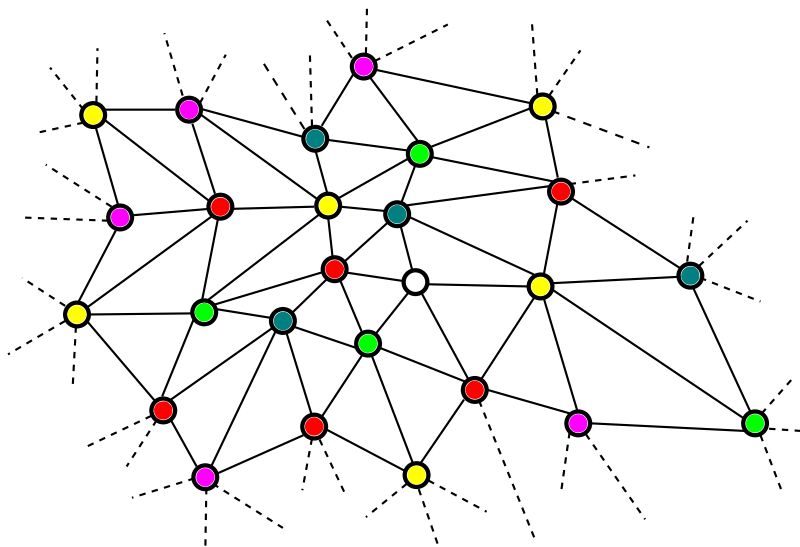
Théorème des cinq couleurs



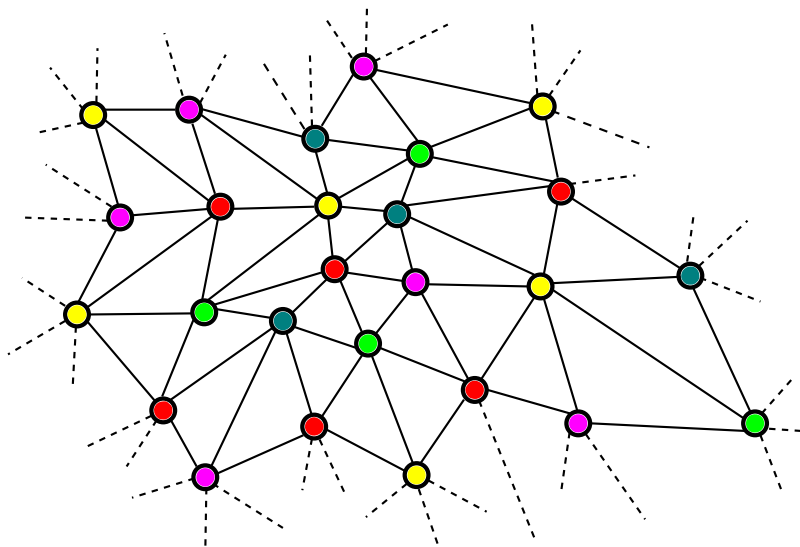
Théorème des cinq couleurs



Théorème des cinq couleurs



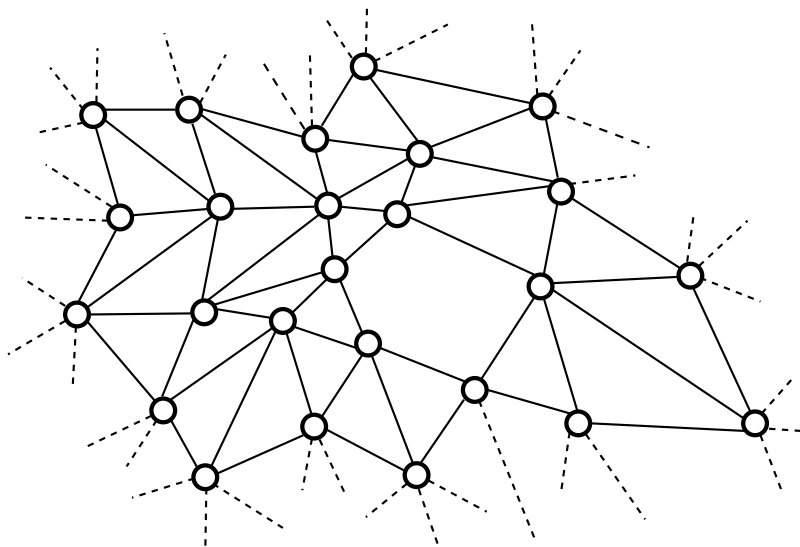
Théorème des cinq couleurs



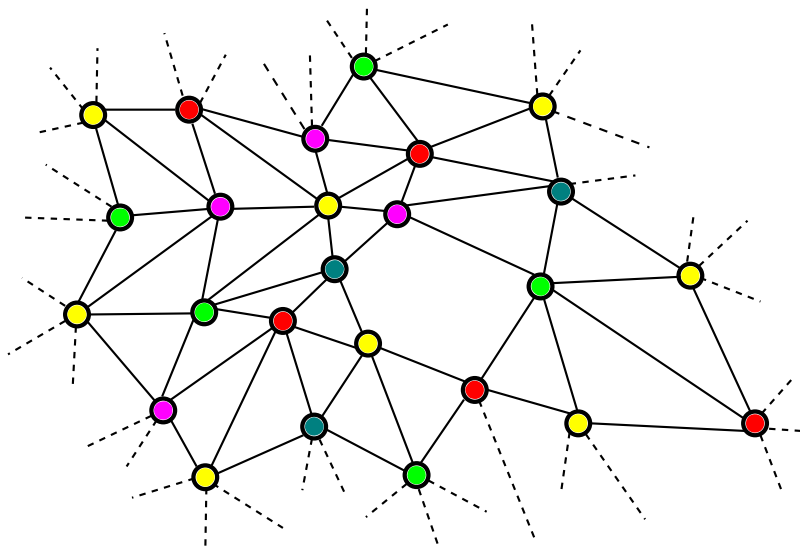
Théorème des cinq couleurs

2ème cas

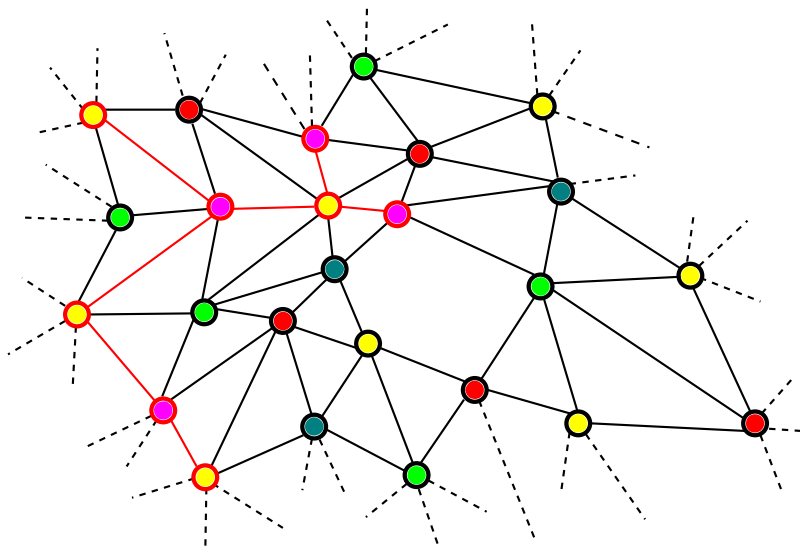
Théorème des cinq couleurs



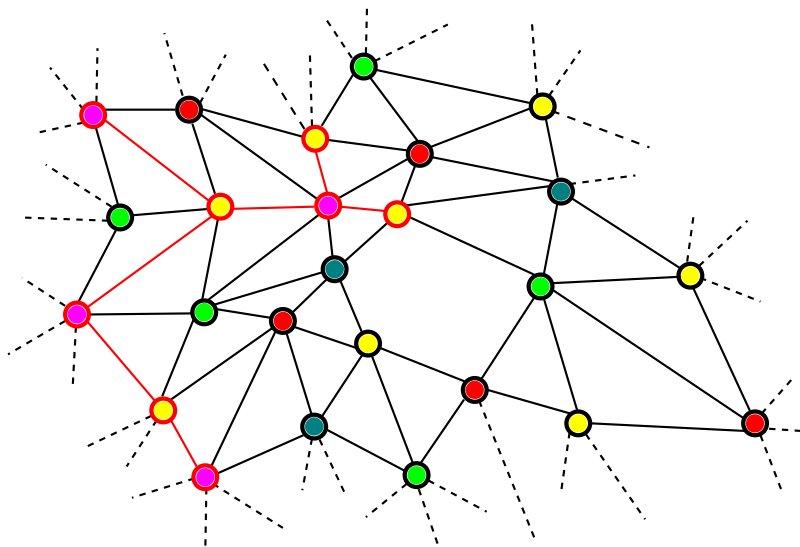
Théorème des cinq couleurs



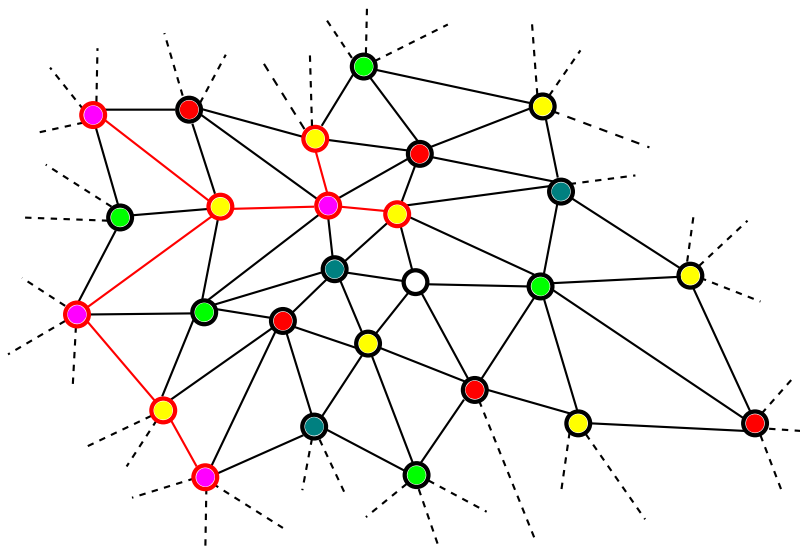
Théorème des cinq couleurs



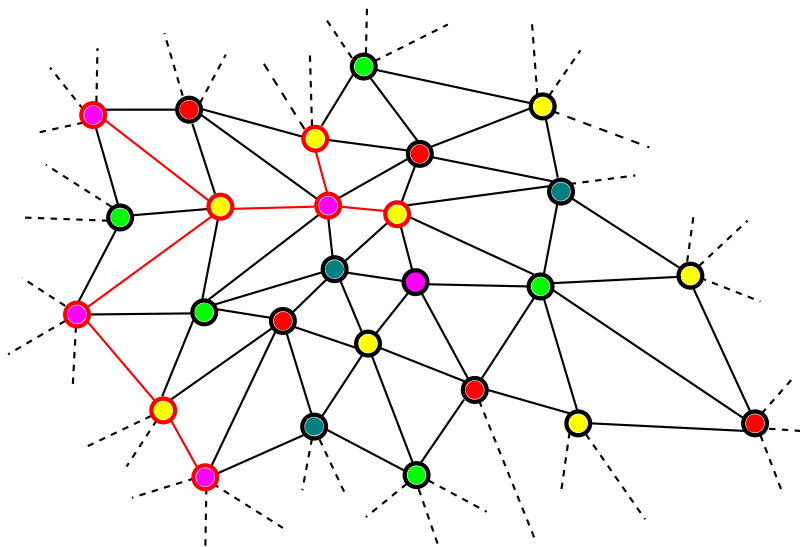
Théorème des cinq couleurs



Théorème des cinq couleurs



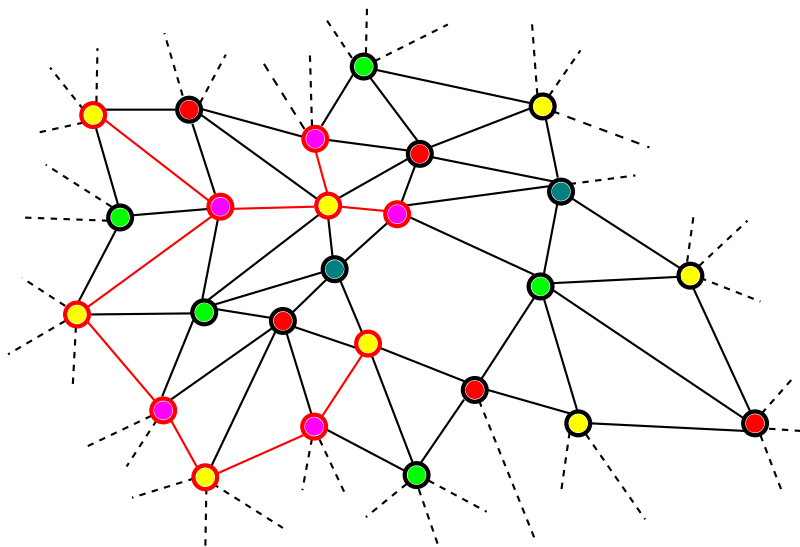
Théorème des cinq couleurs



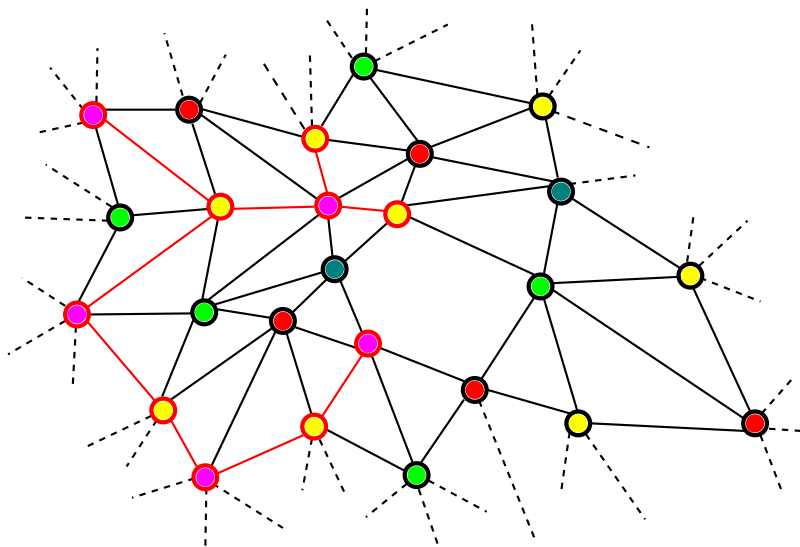
Théorème des cinq couleurs

Sauf si ...

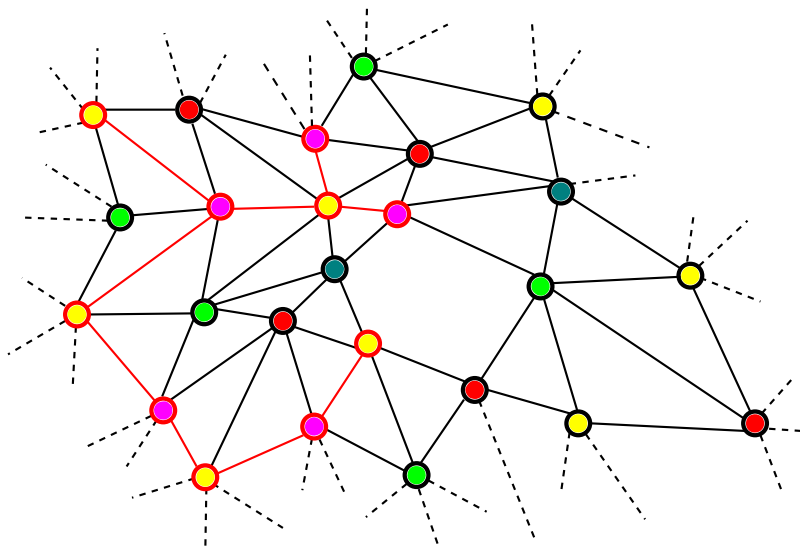
Théorème des cinq couleurs



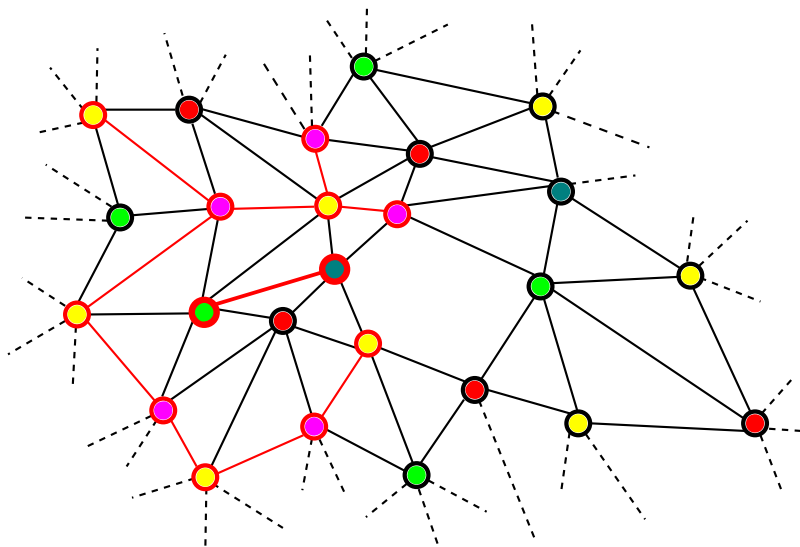
Théorème des cinq couleurs



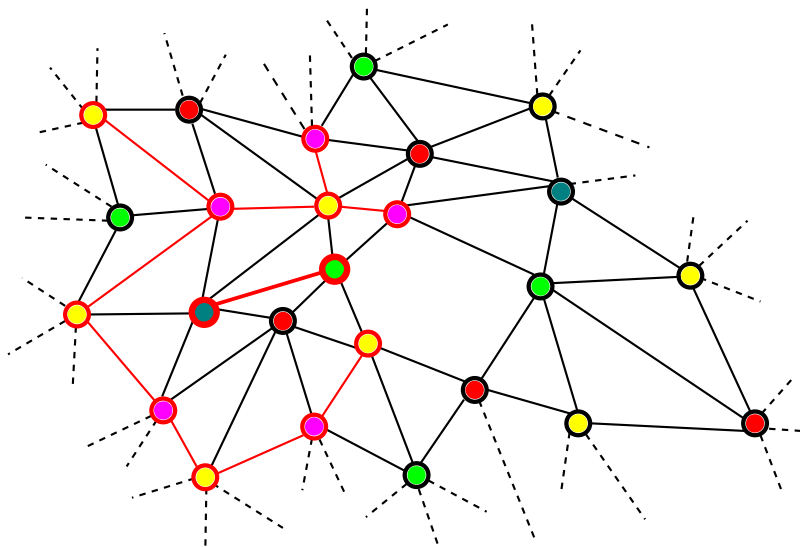
Théorème des cinq couleurs



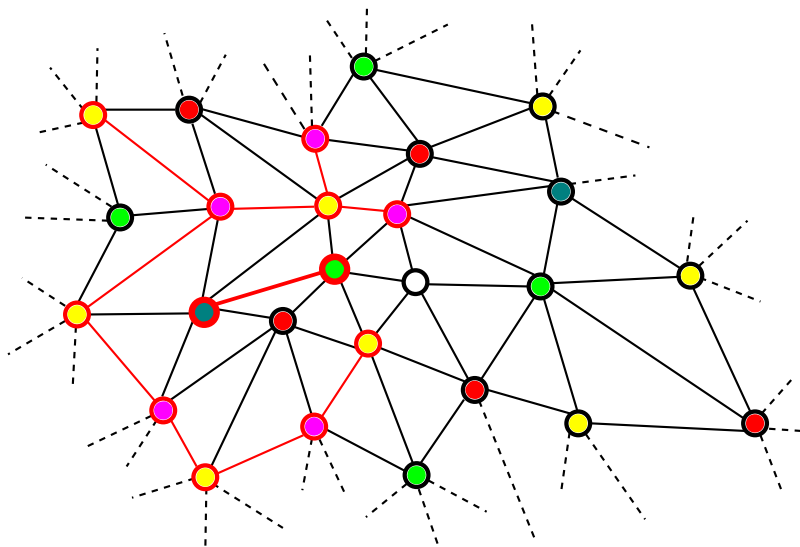
Théorème des cinq couleurs



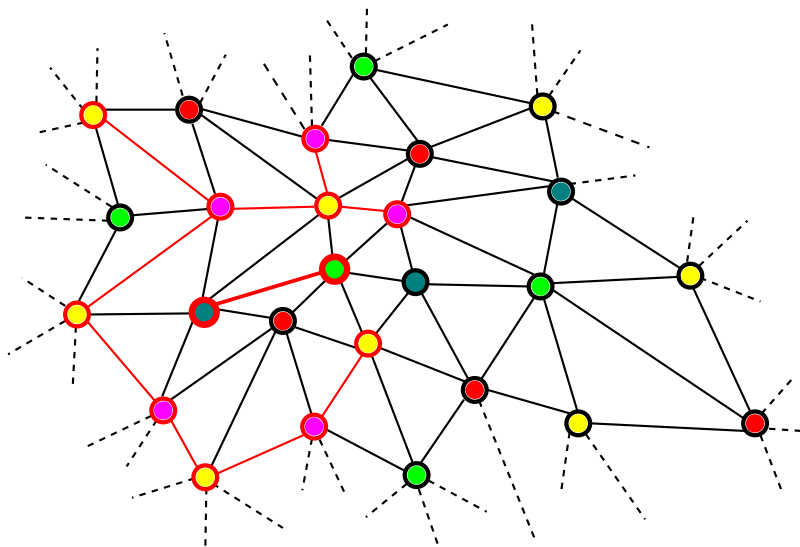
Théorème des cinq couleurs



Théorème des cinq couleurs



Théorème des cinq couleurs



Théorème des cinq couleurs



Théorème des quatre couleurs

Théorème des quatre couleurs

Il suffit de quatre couleurs pour colorier n'importe quel graphe planaire.

La démonstration est due à Appel et Haken en 1976 et utilise de façon intensive l'ordinateur.

Questions Bonus

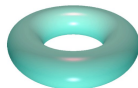
- ▶ ... et les cartes sur un globe ?



- ▶ ... et les cartes formées uniquement par des droites ?

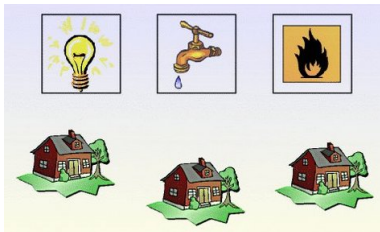


- ▶ ... et sur un tore ?

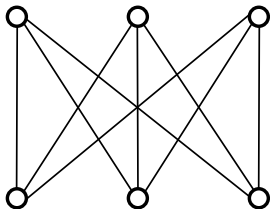


Enigme des trois maisons

Comment, sur une feuille de papier, relier trois maisons à trois services (l'électricité, l'eau et le gaz) de sorte que les conduites et câbles ne se coupent pas ?

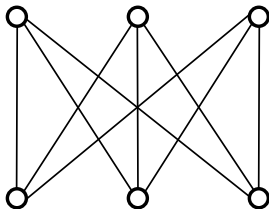


Autrement dit, le graphe $C_{3,3}$ est-il planaire ?



► retour

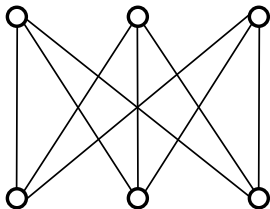
Autrement dit, le graphe $C_{3,3}$ est-il planaire ?



Supposons que $C_{3,3}$ est planaire.

► retour

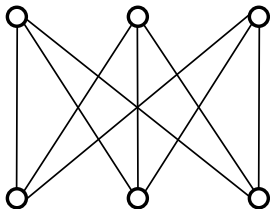
Autrement dit, le graphe $C_{3,3}$ est-il planaire ?



Supposons que $C_{3,3}$ est planaire.

- ▶ On a $S = 6$ et $A = 9$, donc $Z = 5$.

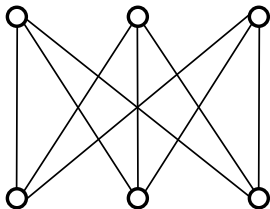
Autrement dit, le graphe $C_{3,3}$ est-il planaire ?



Supposons que $C_{3,3}$ est planaire.

- ▶ On a $S = 6$ et $A = 9$, donc $Z = 5$.
- ▶ Chaque zone est bordée par au moins 4 arêtes. Donc $2A \geq 4Z$.

Autrement dit, le graphe $C_{3,3}$ est-il planaire ?



Supposons que $C_{3,3}$ est planaire.

- ▶ On a $S = 6$ et $A = 9$, donc $Z = 5$.
- ▶ Chaque zone est bordée par au moins 4 arêtes. Donc $2A \geq 4Z$.
- ▶ On a donc $18 \geq 20$, absurde ! □

sur un globe

Par projection stéréographique !

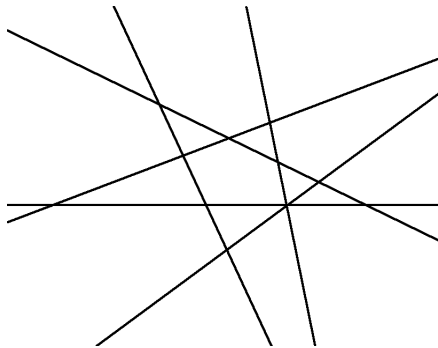


4 couleurs suffisent !

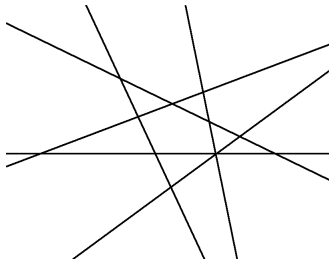
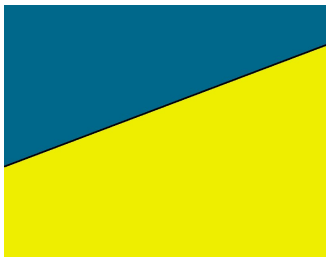
► retour

les cartes formées uniquement par des droites

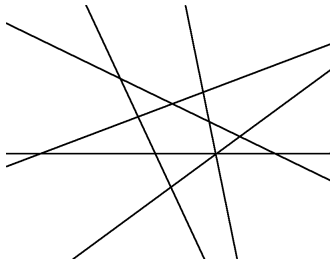
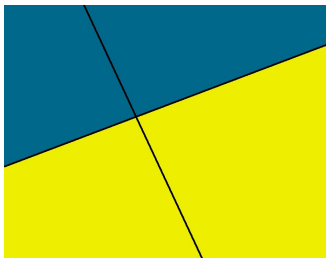
pour colorier



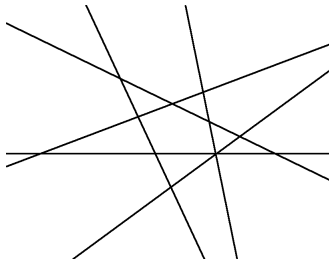
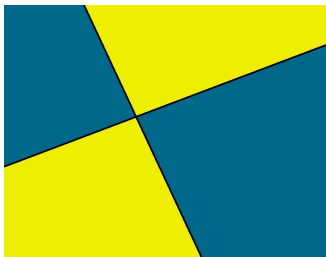
les cartes formées uniquement par des droites



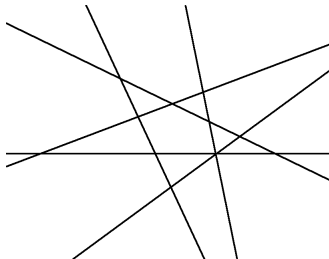
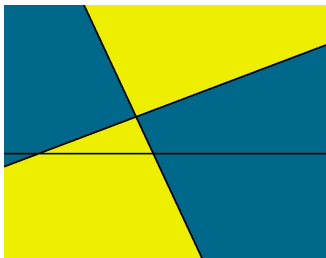
les cartes formées uniquement par des droites



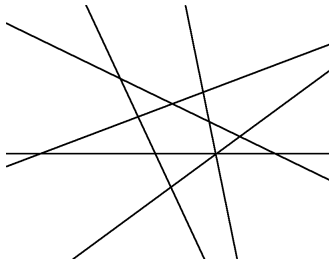
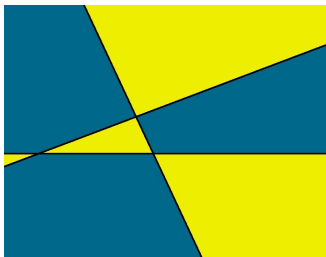
les cartes formées uniquement par des droites



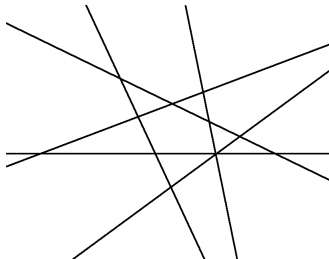
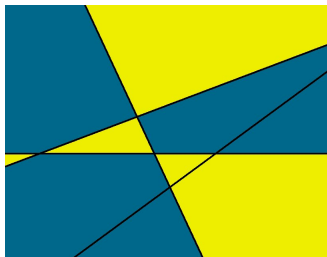
les cartes formées uniquement par des droites



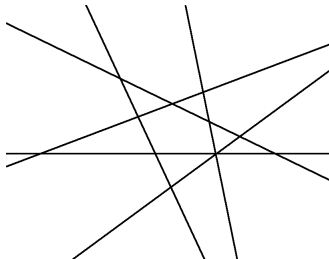
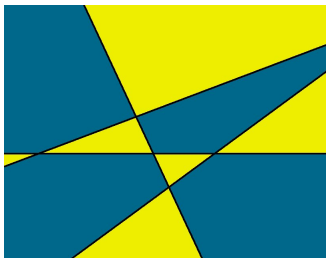
les cartes formées uniquement par des droites



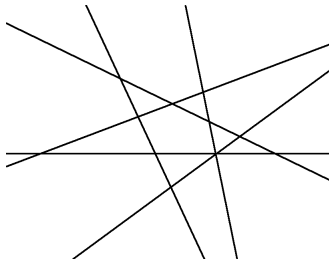
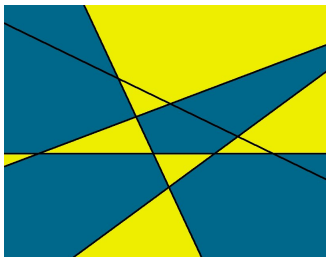
les cartes formées uniquement par des droites



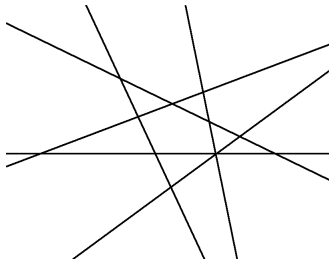
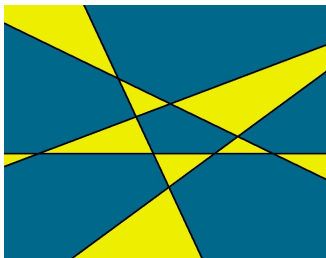
les cartes formées uniquement par des droites



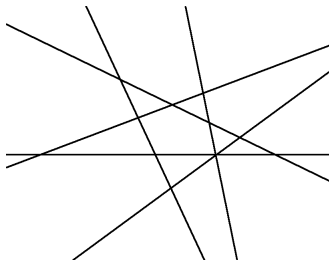
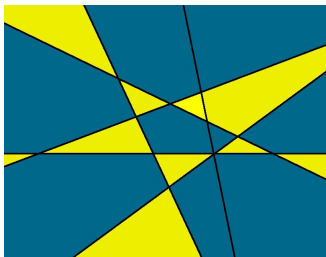
les cartes formées uniquement par des droites



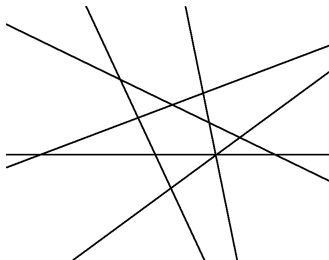
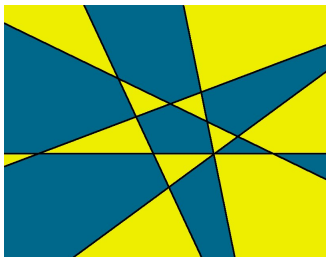
les cartes formées uniquement par des droites



les cartes formées uniquement par des droites



les cartes formées uniquement par des droites



les cartes formées uniquement par des droites

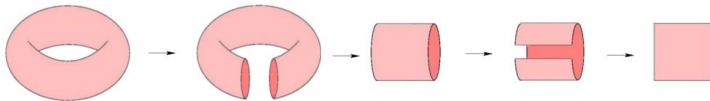
On a démontré :

Il suffit de 2 couleurs pour colorier n'importe quelle carte formée uniquement par des droites.

► retour

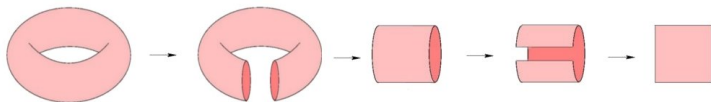
sur le Tore

Déplions le tore :

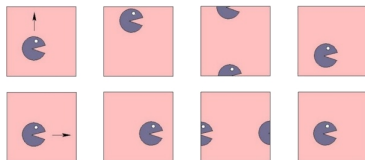


sur le Tore

Déplions le tore :

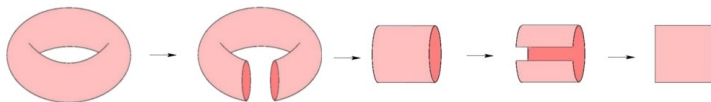


On obtient un carré avec les règles suivantes :

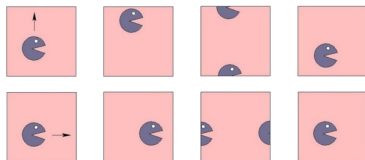


sur le Tore

Déplions le tore :



On obtient un carré avec les règles suivantes :



Combien peut-on dessiner de régions partageant des frontières avec toutes les autres ?

