



# Petit recueil d'énigmes

Patxi RITTER

(\*) facile  
(\*\*) moins facile  
(\*\*\*) pas facile  
(\*\*\*\*) il faudra de l'aide  
Solutions en rouge.

## 1) Cryptarithme (\*\*)

Trouvez la valeur de A, B et C satisfaisant l'équation suivante. Chaque inconnue est un chiffre compris entre 1 et 9 inclus.

Attention aux retenues !!

$$\begin{array}{r} \text{BAC} = 956 \\ \phantom{BAC} + \phantom{BAC} \\ \phantom{BAC} + \phantom{BAC} \\ \hline = 17A7 \end{array}$$

$A+A+A+\text{ret}2 = 17$  avec  $\text{ret}2 \leq 2$  car  $3N \leq 27$  pour  $N=9$  au maximum  
 $3*4 = 12, 12+2=14 < 17$   
 $3*6=18 > 17$   
 $3*5=15, 15+2 = 17 \rightarrow A=5$  et  $\text{ret}2=2$   
 $B+B+C+\text{ret}1 = 25$  car  $\text{ret}2=2$  donc  $C \geq 5$   
Or  $A+C+C = 5+2C = 7$  ou  $17$  et  $C \geq 5$  donc  $5+2C=17 \rightarrow C=6$   
Ainsi  $B = 9$

## 2) Age (\*\*)

J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons ensemble 56 ans. Etes-vous majeur?

Age de « j'ai » = âge de « Y » = y ans  
Age de « vous » = âge de « X » = x ans

1ere affirmation : quand Y avait l'âge actuel de X il avait  $y-(y-x)$  ans et donc X avait  $x-(y-x)$  ans qui correspond à 1 tiers de son âge actuel donc  $3(x-(y-x))=y$  ou  $6x=4y$

2eme affirmation : Quand X aura l'âge de Y il aura  $x+(y-x)$  qui, si on l'additionne à l'âge de Y à la même époque  $y+(y-x)$  on trouve 56. Soit  $3y-x = 56$

On trouve ainsi  $y = 24$  et  $x = 16 < 18$  (pas majeur)

### 3) Systeme fou (\*)

$$1+1=a$$

$$a+a=b$$

$$b+b=c$$

$$((a*b)*c)/(a*b)=y$$

$$y*a*c=n$$

$$\text{reponse} = (y*a*b*c*n)/a$$

$$b^2+a^2=L$$

$$e=(a+a)*b$$

$$s=(y+n)*b$$

$$t=(c*a)/y^2$$

$$\text{L.a.reponse.e.s.t} = 2852126720$$

### 4) Carrés (\*\*)

On dispose des séries de nombres suivants:

1,2,3,4,5

1,3,4,5,6

1,4,5,6,7

1,5,6,7,8

etc...

Trouver une relation valable pour chaque série utilisant la totalité des nombres pour obtenir le carré d'un entier.

Les opérateurs autorisés sont la multiplication et l'addition.

$$1+2*3*4*5 = 121 = 11^2$$

$$1+3*4*5*6 = 361 = 19^2$$

$$1+4*5*6*7 = 841 = 29^2$$

$$1+5*6*7*8 = 1681 = 41^2$$

$$1+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = k^2$$

### 5) 2 écritures pour un même nombre ? (\*)

Posons  $A = 0,999999999999\dots$  (à l'infini).

*Remarque : un nombre avec une partie décimale infinie, cela existe : pensez par exemple au célèbre  $\pi$  ou  $\sqrt{2}$ .*

Prenons alors ce nombre A et faisons lui subir quelques opérations élémentaires :

$$10*A = 9,999999999999\dots$$

$$10*A = 9+0,999999999999\dots$$

$$10*A = 9+A$$

$$10*A-A = 9$$

$$9*A = 9$$

D'où  $A=1$

Peut-on vraiment dire que  $1 = 0,999999999999... ??$

Si oui, trouvez une autre façon de le prouver simplement en utilisant le chiffre 3 et son inverse.

La réponse à la question est oui et le calcul en était une démonstration rigoureuse. En effet «  $\infty-1=\infty$  ».

Autre démonstration moins élégante serait  $1=3*(1/3)=3*0,3333...=0,9999...$

### 6) $1+2+3+4+...+100 = ? (**)$

Calculer la somme des entiers de 1 à 100.

Plus généralement peut-on trouver une formule, fonction de n, qui nous donne la somme des nombres entiers de 1 à n ?

*Indice : On peut voir cette somme de la façon suivante*

$$1+2+3+...+100 = (1+100) + (2+99) + (3+98) + ... + (50+51)$$

Somme de 1 à n =  $n*(n+1)/2$

### 7) « Equalphabet » (\*)

$$(x-a)(x-b)(x-c)...(x-y)(x-z)$$

Sachant qu'il y a 26 paires de parenthèses et que les nombres  $\{a,b,...,z\}$  sont quelconques, à quoi est égale cette équation ?

$(x-x) = 0$

### 8) Récurrence (\*\*)

On définit la suite

$$A_n = A_{n-1} + \text{PGCD}(n, A_{n-1})$$

$$A_1 = 7$$

Quelle est la particularité des nombres générés par les quantités  $(A_n - A_{n-1})$  ?

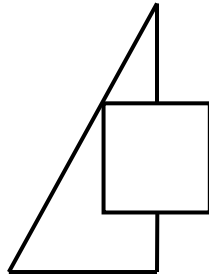
$1, 1, 1, 5, 3, 1, 1, 1, 1, 11, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 23, 3, 1, \dots$

Les  $(A_n - A_{n-1})$  sont premiers.

**9) Un problème de l'antiquité chinoise (\*)**

Une ville carrée de dimensions inconnues possède une porte au milieu de chaque côté. Un arbre se trouve à 20 pas de la porte Nord, à l'extérieur de la ville. Il est visible d'un point que l'on atteint en faisant 14 pas à partir de la porte Sud puis 1775 pas vers l'ouest.

Quelle est la dimension de chaque côté de la ville?



Thales

$$(x/2)/20=1775/(20+x+14)$$

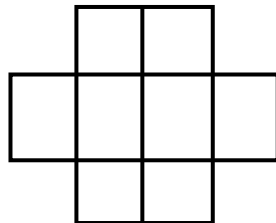
Cela donne:  $x^2 + 34x - 71000 = 0$  dont la solution positive est 250

Le côté de la ville mesure donc 250 pas.

**10) Croix numérique (\*)**

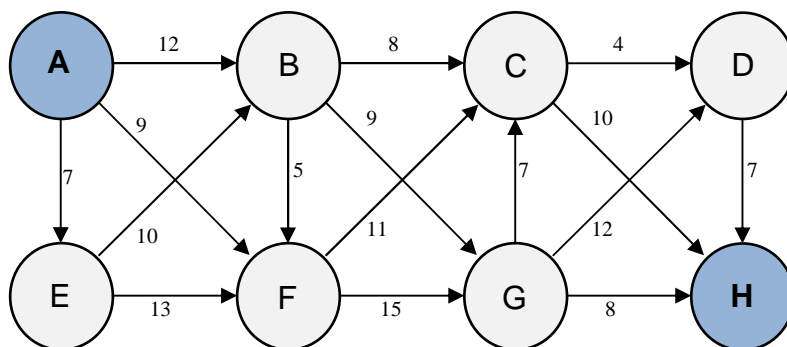
Ranger les chiffres de 1 à 8 dans le tableau ci-dessous sachant que deux chiffres consécutifs ne doivent pas se toucher.

*(Indice : les chiffres 1 et 8 sont particuliers puisqu'ils n'ont qu'un seul voisin qui leur est consécutif donc...)*



**11) Dijkstra (\*)**

Le plus court chemin est la ligne droite mais quel est le plus coûteux ?



AEBFGDH

## 12) Glaçon (\*\*)

On met un glaçon dans un verre d'eau puis l'on remplit celui-ci à ras bord.

Que se passe-t-il pendant la fonte du glaçon? Le niveau d'eau ne change pas, il baisse, ou bien le verre déborde?

Le glaçon flotte donc il est en équilibre. Son poids compense exactement la poussée d'Archimède.

L'intensité du poids se définit par le produit de la masse fois l'accélération de la pesanteur terrestre.  $P = m_{\text{glaçon}}g$

L'intensité de la poussée d'Archimède se définit comme le poids du volume d'eau déplacé dans le verre par le glaçon.  $A = m_{\text{eau_déplacée}}g$ .

L'équilibre des forces dit que  $P = A$  et donc que  $m_{\text{glaçon}} = m_{\text{eau_déplacée}}$ .

La masse volumique d'un élément se construit comme le rapport de sa masse sur son volume occupé dans l'espace.  $\mu = m/V$

L'équilibre précédent peut donc s'écrire  $\mu_{\text{glaçon}} V_{\text{glaçon}} = \mu_{\text{eau_déplacée}} V_{\text{eau_déplacée}}$

En fondant la masse d'eau produite par la fonte du glaçon est identique à la masse du glaçon (conservation de la masse). Cependant cette eau aura une masse volumique qui n'est plus celle du glaçon mais qui est  $\mu_{\text{eau_fondue}} = \mu_{\text{eau_déplacée}}$  et occupera un volume  $V_{\text{eau_fondue}} = m_{\text{glaçon}} / \mu_{\text{eau_déplacée}}$  qui est exactement égal à  $V_{\text{eau_déplacée}}$ .

Pour résumer, **le niveau de l'eau dans le verre ne change pas** car l'eau produite par la fonte du glaçon occupera exactement le volume occupé par la partie immergée du glaçon (ou de façon équivalente le volume d'eau déplacé par le glaçon).

Même expérience mais dans un verre de Whisky. Que ce passe t-il ?

Le Whisky contenant de l'éthanol on dit de lui qu'il est « plus léger que l'eau ». En fait sa masse volumique est inférieure à celle de l'eau  $\mu_{\text{whisky}} < \mu_{\text{eau}}$ .

Donc cette fois ci  $\mu_{\text{eau_fondue}} > \mu_{\text{whisky_déplacé}}$  et donc

$V_{\text{eau_fondue}} = m_{\text{glaçon}} / \mu_{\text{eau_fondue}} < m_{\text{glaçon}} / \mu_{\text{whisky_déplacé}} = V_{\text{whisky_déplacée}}$ .

On a ainsi  $V_{\text{eau_fondue}} < V_{\text{whisky_déplacée}}$  qui par conséquent fait **baisser le niveau du verre de Whisky...**

En bref : la masse volumique de l'éthanol étant plus faible que celle l'eau, l'eau fondue occupera moins de place que le volume d'alcool déplacé donc le niveau baisse.  
Moralité ?

## 13) Diophante (\*\*)

Diophante d'Alexandrie était un brillant mathématicien grec qui vivait au IVème siècle avant notre ère. La légende raconte que ses élèves firent graver sur sa tombe cette épitaphe traduite en alexandrins par Emile Fourrey dans ses *Récréations mathématiques*.

*'Passant sous ce tombeau repose Diophante.  
Ces quelques vers tracés par une main savante  
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.  
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,  
Le sixième marqua le temps de son enfance;  
Le douzième fut pris par son adolescence.*

*Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,  
 Puis s'étant marié, sa femme lui donna  
 Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,  
 Reçut de jours hélas! deux fois moins que son père.  
 De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.  
 Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut."*

A quel âge est mort Diophante ?

On pose l'équation :

$$A = A/6 + A/12 + A/7 + 5 + A/2 + 4$$

et on obtient  $A = 84$ .

On vérifie alors les étapes de la vie de Diophante :

-  $A/6$  : enfant jusqu'à 14 ans

-  $A/12 + A/6$  : (+ 7 ans) Quelques poils à 21 ans

-  $A/7 + A/6 + A/12$  : (+12 ans ) marié à 33 ans

-  $A/6 + A/12 + A/7 + 5$  : (+ 5 ans ) père à 38 ans

-  $A/6 + A/12 + A/7 + 5 + A/2$  (+ 42 ans) il perdit son fils à 80 ans

-  $A/6 + A/12 + A/7 + 5 + A/2 + 4$  : (+ 4 ans) décédé à 84 ans

#### **14) Boulets ! (\*\*\*)**

Sur la place du palais de Monaco, on a empilé des boulets de canon par couches rectangulaires successives. Une première couche repose au sol. Ensuite, la largeur et la longueur de chaque nouvelle couche comportent chacune un boulet de moins que celles de la couche inférieure. Enfin, la dernière couche est une rangée, d'un boulet de largeur, dont la longueur est égale à la largeur de la première couche. Sachant que c'est un carré parfait, on cherche le nombre total de boulets du tas.

1. On cherche une solution inférieure à 1000
2. On cherche une autre solution inférieure à 100 000.

(3. Y a-t-il d'autres solutions ?)

Aide : On rappelle que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1ère rangée (en haut) :  $1 * n$  boulets

2ème rangée :  $2 * (n+1)$  boulets

3ème rangée :  $3 * (n+2)$  boulets

...

n-ème rangée :  $n * (2n - 1)$  boulets

Donc si l'on appelle  $N$  le nombre total de boulets, alors :

$$N = \sum_{k=1}^n k(n+k-1) = \sum_{k=1}^n k^2 + (n-1) \sum_{k=1}^n k$$

$$N = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n-1) \frac{n(n+1)}{2}$$

$$N = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(5n-2)}{6}$$

Le problème consiste donc à trouver  $n$  (hauteur de la pile de boulets) tel que  $N$  (nombre total de boulets) soit un carré.

On peut trouver :

$n = 1$  et  $N = 1$  (solution triviale avec un seul boulet),

$n = 6$  étages et  $N = 196$  boulets en tout (carré de 14),

ainsi que  $n = 49$  étages et  $N = 99245$  boulets en tout (carré de 315).

### 15) Théorie des codes...(\*\*\*)

Pour protéger une information il est parfois nécessaire de la coder. Un code a été appliqué à 4 mots du dictionnaire français :

29575 , 9310 , 1200325 , 3120845

Sachant que

le premier est un mot de 5 lettres et est un objet précieux,

le second est un mot de 7 lettres pouvant encombrer, se plier ou s'accumuler dans une discipline donnée,

le troisième est un mot de 7 lettres synonyme de raison,

et le dernier un mot de 8 lettres pouvant être californien ou même thaïlandais, saurez-vous casser ce code et révéler les mots cachés ?

$A = 1, B = 2, C = 3, \dots, Z = 26$  puis multiplication des lettres entre elles. Exp :  $ABC \rightarrow 1*2*3 = 6$

29575 = 07 x 05 x 13 x 13 x 05      GEMME

9310 = 02 x 01 x 07 x 01 x 07 x 05 x 19      BAGAGES

1200325 = 19 x 01 x 07 x 05 x 05 x 19 x 19 x 05      SAGESSE

3120845 = 13 x 01 x 19 x 19 x 01 x 07 x 05 x 19      MASSAGES

### 16) L'astronome et les 2 comètes (\*\*\*\*)

I - Le 8 décembre 1999, un astronome a observé une comète dans le ciel. De la même position, 6 jours plus tard il a vu une autre comète passer.

Après des recherches, il s'informe que la 1ère comète apparaît périodiquement chaque 105 jours et la 2e tous les 81 jours.

- déterminez le prochain jour où l'astronome pourra voir les 2 comètes passer le même jour.

II - Cependant, cet astronome n'est pas aussi intelligent que vous, alors il rate le rendez vous à la suite d'un faux calcul : aidez le à déterminer le prochain rendez-vous de ces deux comètes.

i)  $6+81n$  doit être multiple de  $105m \rightarrow 6=105m-81m$ .

PGCD(81,105)=3, remonté de l'algo d'Euclide  $\rightarrow m=26$  et  $n=20$  donc elles sont apparues en même temps  $20*105$  jours avant le 8 décembre 1999 soit le 9 mars 1994. La prochaine rencontre aura lieu dans un nombre de jour qui correspond au plus petit multiple commun de 105 et 81 après le 9 mars 1994. On a PPCM(81,105)= $81*105/\text{PGCD}(81,105)=2835$  jours donc le 12 décembre 2001.

ii) De même  $12 \text{ décembre } 2001 + 2835 \text{ jours} = 16 \text{ septembre } 2009$

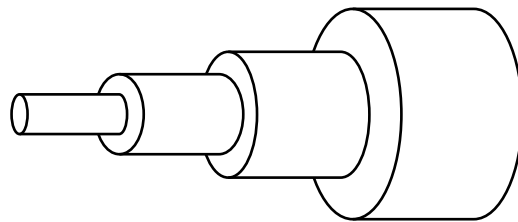
### 17) Problème de Bhaskara (Inde, XII ème siècle) (\*\*\*)

“Si tu es versé dans les opérations de l’algèbre, dis le nombre dont le bicarré moins le double de la somme du carré et deux cent fois le nombre est égal à la myriade moins un.” ( une myriade égale 10.000 “le myriarche commandait dix mille hommes”, le bicarré = puissance 4)

$$\begin{aligned} X^4 - 2(X^2 + 200X) &= 10000 - 1 \\ X^4 - 2X^2 + 1 - 400X - 100^2 &= 0 \\ X^4 + 2X^2 + 1 - 4X^2 - 400X - 100^2 &= 0 \\ (X^2 + 1)^2 - (2X + 100)^2 &= 0 \\ X^2 - 2X - 99 &= 0 \rightarrow X = \{-9, 11\} \end{aligned}$$

### 18) Trompette $\infty$ (\*\*\*)

Prenons un cylindre creux d’épaisseur nulle, d’un mètre de rayon d’un mètre de hauteur. Je pose dessous le même genre de cylindre mais cette fois de 1/2 mètre de rayon d’un mètre de hauteur. Puis encore dessous un cylindre de 1/3 de mètre de rayon et toujours d’un mètre de hauteur le long de l’axe de symétrie des cylindres. Cela fabrique un entonnoir "discret". Je continue mon entonnoir avec une infinité de cylindres de plus en plus petits, les rayons étant de 1/n et les hauteurs de 1 mètre.



Question 1: Quelle est le volume intérieur de l’entonnoir ?

Question 2: Quelle est la surface intérieure de l’entonnoir ?

Remarque : Dans ce dernier calcul on ne comptera pas la surface des couronnes.

Aide : Euler nous apprend  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Quel est le paradoxe?

Volume d'un cylindre de hauteur 1 mètre et de rayon r :  $\pi R^2$

Surface de la paroi verticale du même cylindre :  $2\pi R$

Volume de "l’entonnoir télescopique" :  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \pi \left(\frac{R}{k}\right)^2 = R^2 \frac{\pi^3}{6}$  car, d’après Euler  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Surface du dit entonnoir :  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N 2\pi \left(\frac{R}{k}\right) = \infty$

On a donc, **un solide de surface infinie et de volume fini.**

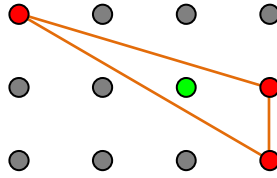
Note : En remplaçant la somme par une intégrale, on tombe sur la trompette de Gabriel.



### 19) Un petit problème de géométrie-arithmétique (\*\*)

On dessine un triangle dont les sommets sont les nœuds d'un quadrillage orthonormé. L'intérieur du triangle contient un unique nœud G (point vert) et les côtés du triangle ne passent par aucun autre nœud du quadrillage.

*Indice : Formule de Pick.*



G est-il toujours le centre de gravité du triangle ?

Utilisation de la formule de Pick

3 sommets A, B, C et un point G unique à l'intérieur.

$$\text{Aire}(ABC) = 1 + 3/2 - 1 = 1,5$$

$$\text{Aire}(ABG) = \text{Aire}(ACG) = \text{Aire}(BCG) = 0 + 3/2 - 1 = 0,5$$

Donc G est bien le centre de gravité de ABC.

Soit un polygone construit sur une grille de points équidistants tel que tous ses sommets soient des points de la grille ; le **théorème de Pick** fournit une formule simple pour calculer l'aire  $A$  de ce polygone en se servant du nombre  $i$  de *points intérieurs* du polygone et du nombre  $b$  de *points du bord* du polygone :

$$A = i + \frac{1}{2} \cdot b - 1$$

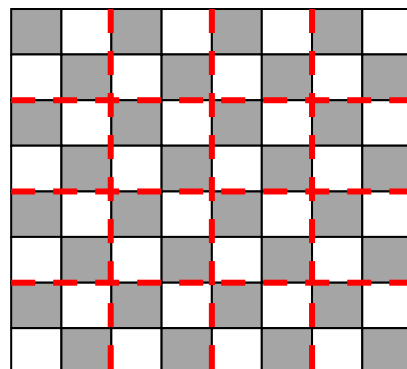
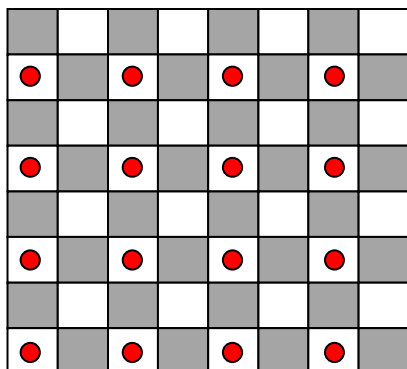
### 20) Echec au Roi (\*)

Sachant que deux rois situés sur deux cases qui se touchent par un côté ou par un coin s'attaquent, combien peut-on disposer de rois au maximum sur un échiquier (de taille 8 fois 8) sans qu'aucun n'attaque un autre ?

On peut tenter de placer les rois les plus proches possible des uns des autres en commençant par exemple par le coin inférieur gauche du damier. Au total on voit que l'on peut placer 16 rois et qu'on ne peut en aucun cas en rajouter un 17<sup>ème</sup> sans qu'il n'attaque un des autres. Cependant peut être existe-t-il une autre configuration qui autorise un nombre plus important que la solution 16.

En fait, il s'agit d'une application ingénieuse du principe des tiroirs : on peut découper l'échiquier en 16 parties, chacune constitué de 4 cases disposées en carré.

Supposons donc que l'on ait disposé 17 rois sur l'échiquier. D'après le principe des tiroirs, au moins 2 d'entre eux se trouvent dans la même case, donc s'attaquent mutuellement !



## 21) Nombres de Kaprekar (\*)

Un nombre de Kaprekar est un nombre qui, dans une base donnée, lorsqu'il est élevé au carré, peut être séparé en une partie gauche et une partie droite (non nulle) telles que la somme donne le nombre initial.

Montrer que 703 est un nombre de Kaprekar en base 10.

5, 9, 13, 45, 55, 98 et 297 sont-ils des nombres de Kaprekar ?

$$703 = 494209 ; 494+209=703$$

$$1, 9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2223, 2728, 4879, 4950, 5050, 5292, \dots$$

## 22) 5 (\*\*)

Une conjecture dit que toutes les puissances de 5 ont la propriété de voir leurs chiffres réarrangés en un calcul simple donnant leur valeur.

$$5^1 = 5 = 5$$

$$5^2 = 25 = 5^2$$

$$5^3 = 125 = 5^{(1+2)}$$

$$5^4 = 625 = 5^{(6-2)}$$

...

Les opérations autorisées sont + - / \* et ^

Aller un peu plus loin,  $5^5$ ,  $5^6$ ,  $5^7$ ...

$$5^1 = 5 = 5$$

$$5^2 = 25 = 5^2$$

$$5^3 = 125 = 5^{(1+2)}$$

$$5^4 = 625 = 5^{(6-2)}$$

$$5^5 = 3125 = 5^{(3+1*2)} = (3+1*2)^5 \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^6 = 15625 = 5^{((1+5+6)/2)}$$

$$5^7 = 78125 = 5^{(17-8-2)}$$

$$5^8 = 390625 = 5^{(9+0-6/2/3)}$$

$$5^9 = 1953125 = 5^{(19-5-3-1*2)} = (1+9-5)^{((3+1)*2)*5} \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{10} = 9765625 = 5^{((9+7+6)/2+5-6)} = (9+7+6-5+6+2)^5 \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{11} = 48828125 = 5^{(4+8+8+2-8-1-2)} = (48/8/2-8)^{12/5} \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{12} = 244140625 = 5^{(2*4+4+1*4+0-6+2)} = (((2+4)*4+1)^4+0)*625 \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{13} = 1220703125 = 5^{(1*2-2+0+7+0+3+1+2)} = (((-2)*2+0+7+0)^{(3*1+2*5)}) \text{ (dans l'ordre)}$$

$$= (1+2+2-0-7-0-3)^{12*5} \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{14} = 6103515625 = 5^{(6+1+0+3+5-1*5+6-2)} = ((6-10+3)*5)^{(1+5+6)*25} \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{15} = 30517578125 = 5^{(3+0+5-1+7+5+7-8-1-2)} = (30+5+1+7*5+7*8-1*2)^5 \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{16} = 152587890625 = 5^{(1*5-2+5+8-7+8-9+0+6+2)} = (1+5+2-5+8-7-8+9+0)^{(6+2*5)} \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{17} = 762939453125 = 5^{(7+6+2+9+3-9+4-5+3-1-2)} = (7*6-29-3-9+4)^{(5*3*1)*25} \text{ (dans l'ordre)}$$

$$5^{18} = 3814697265625 = 5^{(38-14+69-72+6-5-6+2)} = (3*8-1-4-6-9-7+2+6)^{(5+6*2)*5} \text{ (dans l'ordre)}$$

**23) 42 est la réponse ultime (\*\*)**

Si  $19+29=42$  et si  $15+16+17=42$ , combien font  $14+19$  ? Et pourquoi?

Indice : un changement de base est peut être nécessaire 🤔

2D en hexadecimal

**24) Tuyauterie (\*\*)**

Considérons un tuyau circulaire d'un diamètre de 6 cm, dans lequel sont insérés 2 câbles : l'un de 4 cm de diamètre, l'autre de 2 cm de diamètre.

Quel est le diamètre du plus gros câble que je puisse ajouter dans le tuyau ?

Indice : Exprimez la longueur des 3 segments en gras de manière à obtenir 3 équations à 3 inconnues X, Y et Z, la valeur cherchée étant X.

(1)  $(1+X)^2 = Y^2 + Z^2$

(2)  $(2+X)^2 = (3-Y)^2 + Z^2$

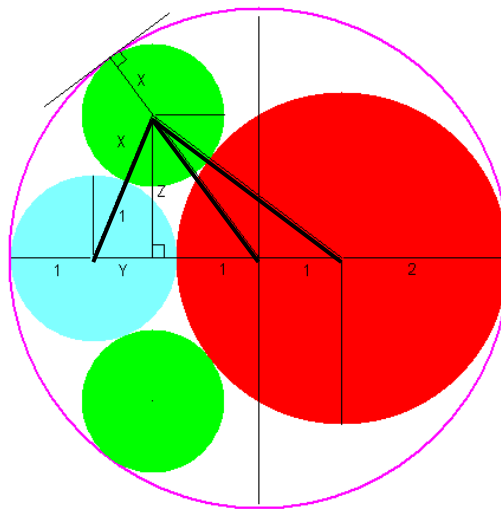
(3)  $(3-X)^2 = (2-Y)^2 + Z^2$

3 équations, 3 inconnues, on résout :

$X = 6/7$ .

(2)-(3)  $\rightarrow Y = 5-5X$

(3)-(1)  $\rightarrow X = 6/7$



**25) SamLoyd # 1 (\*\*\*)**

Le passage d'un fleuve est assuré par deux bateaux. Chacun de ces bateaux circule à vitesse constante, mais l'un des bateaux est plus rapide que l'autre.

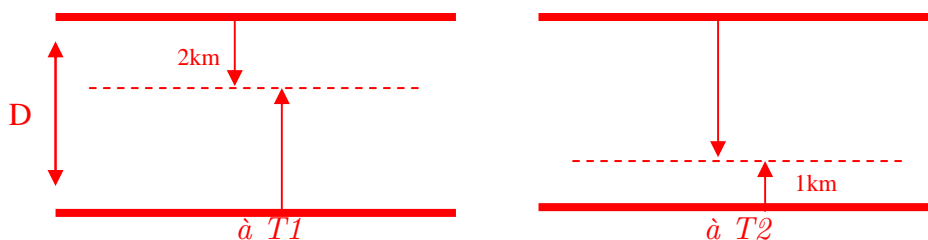
Les bateaux partent exactement à la même heure des rives opposées et se croisent à 2 km d'un des bords.

Ayant effectué leur trajet aller, ils s'arrêtent chacun 10 minutes.

Pendant le trajet du retour, ils se croisent à 1 km de l'autre bord.

Quelle est la largeur du fleuve?

Remarque : La vitesse moyenne d'un mobile s'écrit comme le rapport de la distance parcourue sur l'intervalle de temps pris pour effectuer cette distance  $V = D/T$ .



D doit être supérieur à 4 car la distances au moment des 2 croisements est relative aux deux rives distinctes.

Instant T1 du 1<sup>er</sup> croisement :  $T1 = (D-2)/V1 = 2/V2 \rightarrow V1/V2 = (D-2)/2$

Instant T2 du 2<sup>ème</sup> croisement :  $T2 = D/V1 + 10 + (D-1)/V1 = D/V2 + 10 + 1/V2 \rightarrow V1/V2 = (2D-1)/(D+1)$

→ D=5

## 26) Proba&Rongeur (\*\*)

Une souris est mise dans une cage à 8 portes semblables dont une seule peut permettre à cette souris de s'échapper; tandis que pour les autres, la souris subira un choc électrique

On suppose que la souris n'a pas une bonne mémoire.

Quelle est la probabilité que la souris s'échappe à la 20eme tentative ?

Puisqu'elle a une très mauvaise mémoire elle a une proba 7/8 de se tromper à chaque tentative. La proba de se tromper 19 fois devient  $(7/8)^{19}$ .

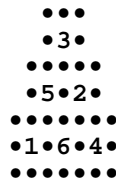
La 20<sup>ème</sup> tentative est la bonne avec une chance sur 8 soit au total  $7^{19}/8^{20}$ .

## 27) Pyramide différenciée (\*\*)

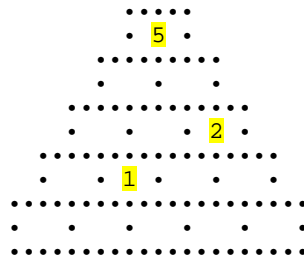
Construisez une pyramide avec les cubes 1 à 15, chaque cube étant la différence absolue des deux cubes du dessous.

*Remarque :  $A - B = 15$  est impossible pour  $A, B \in \{1, 2, \dots, 14\}$*

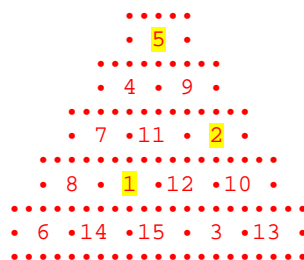
*De même  $A - B = 14$  n'a qu'une solution pour  $A, B \in \{1, 2, \dots, 13, 15\}$*



Un exemple avec 6 premiers cubes.



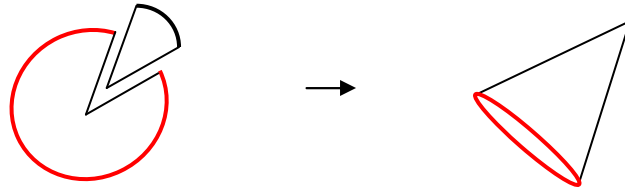
Pyramide à compléter



## 28) Disque et Volume (\*\*\*)

On dispose d'un disque en carton que nous transformons en cône en découpant un secteur et en pliant le reste en forme de cône.

Quel doit être en degrés l'arc du secteur découpé pour que le cône soit de capacité maximum ?



Sans perte de généralité on peut supposer le rayon égal à 1.

Si on découpe un secteur d'angle  $2\pi(1-x)$ ,  $0 < x < 1$ , le cône formé a pour base un cercle de rayon  $x$ .

La hauteur du cône est alors  $\sqrt{1-x^2}$ .

Le volume est, au facteur  $\frac{\pi}{3}$  près,  $x^2\sqrt{1-x^2}$ .

On doit trouver le maximum de  $x^4(1-x^2) = x^4 - x^6$ .

La dérivée est  $4x^3 - 6x^5 = 2x^3(2-3x^2)$ .

Elle s'annule pour  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

L'angle découpé est donc  $360\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 66^\circ 03' 40''$ .

## 29) Question d'abondance (\*\*\*\*)

L'abondance d'un entier  $n$  strictement positif est définie par  $\sigma(n) - n$  où  $\sigma(n)$  est la somme des diviseurs de  $n$  ( $n$  non compris). Un nombre d'abondance positive est appelé un nombre **abondant**, un nombre dont l'abondance est négative est un nombre **déficient** et enfin un nombre qui possède une abondance nulle est un nombre **parfait** (on pourrait également mentionner les nombres **quasi-parfaits** caractérisés par une abondance égale à 1).

Le multiple d'un nombre abondant est-il abondant ?

Combien existe-t-il donc de nombres abondants ?

**THÉORÈME 1.4 :** Soit deux entiers  $k > 1$  et  $n \geq 1$ . Alors  $\sigma(kn) > k\sigma(n)$ .

**DÉMONSTRATION :** Soit  $d_1, d_2, \dots, d_r$  les diviseurs de  $n$ . Alors  $1, kd_1, kd_2, \dots, kd_r$  divisent  $kn$ . Ainsi,  $\sigma(kn) \geq 1 + kd_1 + kd_2 + \dots + kd_r$  et donc  $\sigma(kn) > k(d_1 + d_2 + \dots + d_r) = k\sigma(n)$ .

Comme  $\sigma(n) \geq 2n$  pour les entiers  $n$  parfaits ou abondants, nous pouvons donc affirmer que dans ces cas,  $\sigma(kn) > k\sigma(n) \geq 2kn$ , ou autrement dit que les multiples des nombres parfaits ou abondants sont abondants.