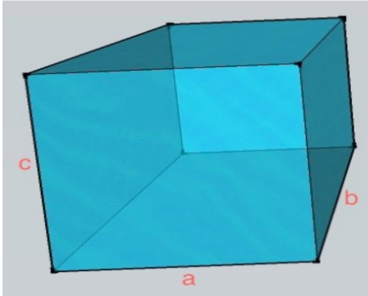
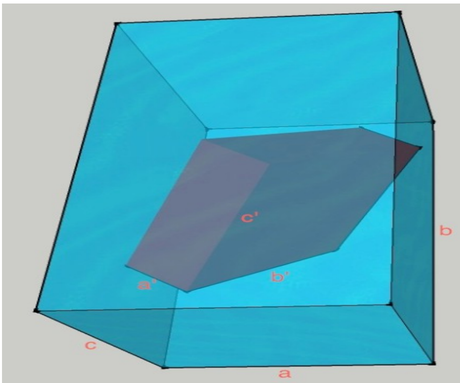
Bagages du métro de Moscou



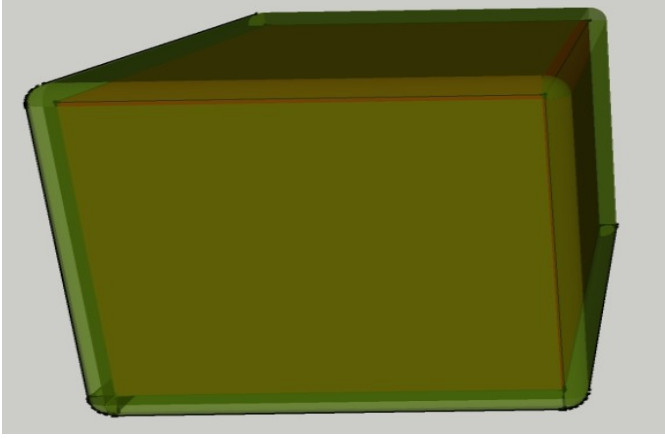
Dans le métro de Moscou, l'encombrement des bagages autorisé est limité. Les bagages sont supposés parallépipédiques rectangles, l'encombrement est par définition la somme des trois longueurs d'arêtes. Cet encombrement est limité par un nombre fixé par le règlement. Question : est-il possible pour un voyageur de tricher, c'est à dire de cacher dans un bagage autorisé un bagage interdit?

Preuve Soit **P** un parrallélipipède rectangle dont les trois longueurs sont a, b et c, avec $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Notons $\mathbf{P}'$ un deuxième parrallélipipède rectangle, ayant pour trois longueurs a', b' et c' contenu dans **P**. (Figure 1)



(Figure 1)

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons l'ensemble des points de l'espace qui sont à une distance inférieure ou égale à ε du parallélipipède **P**. (Figure 2).



(Figure 2)

Le volume de cet ensemble est alors :

$$abc + \pi\varepsilon^2(a+b+c) + 2\varepsilon(ab+bc+ac) + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

En procédent de la même manière avec $\mathbf{P}'$, le volume de l'ensemble formés des points dont la distance est inférieure ou égale à ε de $\mathbf{P}'$ est :

$$a'b'c' + \pi\varepsilon^2(a'+b'+c') + 2\varepsilon(a'b'+b'c'+a'c') + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

L'inclusion de $\mathbf{P}'$ dans $\mathbf{P}$ nous donne alors l'inégalité suivante :

$$a'b'c' + \pi\varepsilon^2(a'+b'+c') + 2\varepsilon(a'b'+b'c'+a'c') + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \leq abc + \pi\varepsilon^2(a+b+c) + 2\varepsilon(ab+bc+ac) + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

En divisant les deux membres de l'inégalité précédente par ε^2, nous obtenons :

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(a'b'c') + \pi(a'+b'+c') + \frac{2}{\varepsilon}(a'b'+b'c'+a'c') \leq \frac{1}{\varepsilon^2}(abc) + \pi(a+b+c) + \frac{2}{\varepsilon}(ab+bc+ac).$$

En faisant tendre ε vers l'infini dans l'inégalité précédente nous obtenons :

$$a'+b'+c' \leq a+b+c.$$

Ce qui achève la preuve.

En conclusion il n'est pas possible de dissimuler un bagage interdit dans un bagage autorisé !