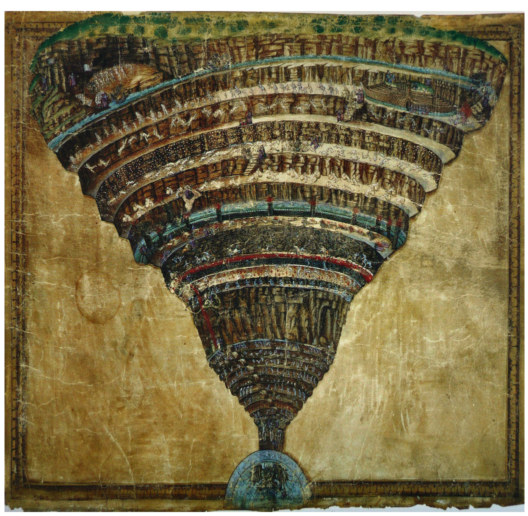
Cercles

Jean-Claude PICAUD

Avant-propos

À quoi bon parler de cercles ? L'objet géométrique en soi n'est-il pas le plus simple qui puisse s'imaginer, à l'exception du point ? À y réfléchir, la construction d'un cercle est plus aisée que celle d'un segmet de droite : une ficelle et deux clous suffisent. Un clou étant fixé au sol, une extrémité de la ficelle au clou, et le second clou à l'autre extrémité de la ficelle, il ne reste plus qu'à tourner autour du premier clou en gardant la ficelle sous tension pour inscrire au sol, au moyen du second clou, la circonférence voulue. Le tracé d'un segment de droite requiert une règle pour être tracé, et construire une règle nécessite que l'on sache, par un procédé artisanal ou industriel, construire une ligne droite, ou, plus précisément, un segment de droite puisque la ligne droite, elle, se prolonge à l'infini de part et d'autre. L'apparente simplicité de la circonférence cache une multitude de propriétés. Je vous propose d'en découvrir quelques unes, en espérant que la fascination opérera. Certaines de ces propriétés tiennent en effet de la magie, ou, dit autrement - si l'on veut rester dans le champ scientifique - sont des conséquences de la symétrie parfaite de l'objet. Une autre motivation a guidé ce choix d'exposition : la thématique offre un point de vue privilégié pour découvrir, au fil de l'Histoire, la construction du *raisonnement déductif* qui a fondé en raison la Science Mathématique.
Le texte qui suit est émaillé d'exercices qui sont autant de pistes de réflexion, de méditation sur le concept de triangle ou de cercle. L'exposé tentera de proposer des solutions à ces exercices, et d'apporter des commentaires qui, espérons-le, feront vivre les objets géométriques et stimuleront votre pensée.



I. Un cercle

Voici, avant toute chose, quelques notations utiles :

Lettre	minuscule	Majuscule
alpha	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ϵ	
theta	θ	Θ
pi	π	Π
omega	ω	Ω

Définition *Considérons un plan dans lequel nous savons mesurer les angles et les distances. Le cercle de centre Ω de rayon R est le lieu des points M à distance R de Ω.*

Remarques 1) Un plan dans lequel il est possible de mesurer les angles et les distances peut révéler une géométrie très compliquée : pensez à un paysage en relief que vous représentez sur une carte plane. La géométrie sur la carte n'est plus homogène : les obstacles naturels (montagnes etc.) font que la ligne droite n'est pas en général le plus court chemin pour se rendre d'un point à un autre et que des chemins de longueur minimale, il peut en exister plusieurs ! Le plan sur lequel vous êtes habitués à réaliser des figures, mesurer des distances, des angles, etc. est le **plan euclidien**.
2) La notion d'angle n'est pas si simple que cela. Les grecs [1] au temps d'Euclide représentaient un angle comme un secteur angulaire délimité par deux demi-droites, et ne considéraient pas la mesure d'angle du secteur angulaire en question, qui n'avait elle aucune existence. Ceci étant il est possible d'additionner ou de soustraire les angles. Les diviser est une toute autre histoire : il est possible de les diviser en deux, au moyen d'une règle et d'un compas qui étaient les instruments

Nous aurons besoin dans ce qui suit de quelques résultats sur les triangles. Ces derniers sont liés de manière naturelle aux cercles ; il faut les considérer faire partie de la même famille ; disons qu'ils sont cousins, et que les polygones sont des cousins plus éloignés à mesure que le nombre de côtés augmente. Nous verrons plus loin qu'il y a lieu de ne pas seulement considérer la famille des cercles, mais d'y inclure les droites, pour former une grande et belle famille unie : **la famille des droites cercles**.

Proposition 1 *La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.*

Exercice Que vaut la somme des angles d'un polygone à n côtés ?

Proposition 2 *Les deux angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.*

Axiome *Tout diamètre du cercle partage le disque qu'il circonscrit en deux parties égales.*

Exercice En effectuant des recherches dans un (bon) dictionnaire, distinguer un axiome, une proposition, un lemme, un corollaire, un théorème.

Proposition 3 *Soit $\mathcal{D}$ un diamètre d'un cercle et M un point courant sur le cercle qui n'est pas une des extrémités de $\mathcal{D}$. Alors le triangle formé par les deux extrémités de $\mathcal{D}$ et M est*

1. Nous donnons un peu plus loin une chronologie et, partant, quelques repères pour situer les avancées des connaissances en géométrie depuis Thalès et l'école ionnienne de Milet (~ VII-ième siècle av. JC) jusqu'à Pappus et même Proclus (~ V-ième siècle ap. JC), tant sur l'objet des connaissances que sur leur nature. La désignation de l'école *grecque* est donc particulièrement floue, puisque sur plus de dix siècles, couverts par la période hellène ~ 600-300 av. JC puis la période hellénistique , de nombreuses écoles de pensées se sont nécessairement succédées !

rectangle en M.

La proposition 3 est un cas particulier du résultat important que voici, qui conduit à une autre **caractérisation** du cercle.

Théorème (de l'angle inscrit) *Soit A, B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω. Si M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B, alors l'angle sous lequel on observe le segment $[A, B]$, vu de M, est la moitié de l'angle β sous lequel on observe le même segment vu de Ω ou bien deux droits ($180°$) auquel on soustrait $\frac{\beta}{2}$.*

La caractérisation d'une droite ou d'un cercle est donnée par la proposition suivante, qui est la **réciproque** du théorème précédent. Elle exige de considérer des angles **orientés** entre vecteurs.
Proposition 4 *Soit A, B, C trois points distincts du plan et $\mathcal{D}$ la droite passant par ces trois points s'ils sont alignés ou bien $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle (ABC si les points ne sont pas alignés. Alors un point M du plan appartient : - à $\mathcal{D}$ si et seulement si l'angle entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ vaut $180°$ à $180°$ près,*
- à $\mathcal{D}$ si et seulement si l'angle orienté de $\overrightarrow{MA}$ à $\overrightarrow{MB}$ vaut l'angle orienté de $\overrightarrow{CA}$ à $\overrightarrow{CB}$ à $180°$ près.

Donnons une autre propriété du cercle qui fait intervenir d'autres distances.

Proposition 5 *Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan euclidien et P un point quelconque du plan. Alors une droite issue de P coupe le cercle en deux points au plus. Si elle coupe le cercle en deux points M et M' (éventuellement confondus lorsque P est à l'extérieur du cercle), le produit des distances :*

$$PM.PM'$$

est constant.

Venons-en à une propriété que l'on pourrait qualifier de miraculeuse et qui est l'énoncé du Lemme 1 dans l'Essai pour les coniques de Blaise Pascal. Cet Essai se présente en fait sous la forme d'un placard (une affiche de grand format) où les énoncés des lemmes et théorèmes sont donnés, sans démonstration. Il s'agit là d'un usage répandu, les démonstrations étant réservées pour des communications ultérieures et/ou orales. Le résultat présenté est celui qui est le plus novateur du traité, même si Pascal l'énonce comme un Lemme. Pascal en déduire quatre cents propriétés satisfaites par la famille de courbes obtenues par section planaire d'un cone de révolution (appelées sections coniques, qui comprend évidemment les cercles).

Exercice

Considérons un cercle du plan que vous allez tracer, de diamètre assez grand afin que votre figure reste lisible. Considérez trois directions (non orientées) distinctes du plan.
1°) Partez d'un point quelconque M_0 de votre cercle, selon la première direction, jusqu'à couper le cercle en un point M_1 ; en partant de M_1 selon la deuxième direction, vous rencontrez le cercle en M_2, puis à partir de M_2 selon la troisième direction en M_3, puis à partir de M_3 suivant la première direction en M_4, puis à partir de M_4 selon la deuxième direction en M_5, puis à partir de M_5 selon la troisième direction en M_6, et vous recommencez en répétant la construction, évoluant suivant les directions 1 puis 2 puis 3. Que constatez-vous ?
2°) Comment nommeriez-vous la figure ainsi construite ?
3°) Dire pourquoi, en permutant les notations sans changer la position des 6 points, nous pourrions obtenir 60 configurations différentes.
4°) On pose comme sur la figure : $M_0 = A$, $M_1 =$, $M_2 = A,$, $M_3 = A$, $M_4 = A$ et $M_5 = A$. Vérifier que les trois points

$$L = (AB') \cap (A'B), \quad M = (AC') \cap (A'C), \quad N = (BC') \cap (B'C)$$

sont alignés.
5°) Cette propriété caractérise-t-elle le cercle, autrement dit ce phénomène se produit-il

pour une courbe en lacet uniquement si cette courbe est un cercle ?

Un dernier sursaut métrique : et la longueur du cercle ? et son aire ?

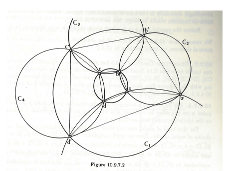
Il avait été observé depuis Archimède au moins (qui est mort pour des cercles) que la longueur de la circonférence était proportionnelle à son rayon. Le facteur de proportion, 2π dans le langage moderne, restait inconnu, et Archimède a proposé une méthode pour donner une valeur approchée rationnelle de ce facteur de proportion, avec une bonne approximation. Sa méthode est très astucieuse et rapproche du cercles ses cousins éloignés que sont les polygones.

La quadrature du cercle ou le problème de même aire

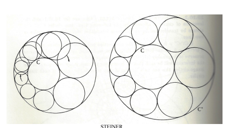
Un des trois fameux problèmes soulevé par les législateurs (grecs) de la géométrie est le suivant : peut-on tracer, au moyen d'une règle non graduée et d'un compas, un carré dont l'aire est la même que celle d'un disque de rayon R connu. Il s'agit donc de rendre le cercle carré (une figure géométrique plane représentait une aire - nous sommes dans la logique de l'algèbre géométrique). Ce n'est qu'au XIX-ième siècle que l'on a démontré l'impossibilité de la résolution de ce problème.

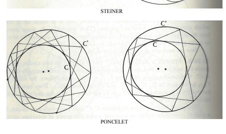
II. Des cercles

Lorsque l'on considère plusieurs cercles, voire une infinité, des résultats très surprenants peuvent apparaître. Nous donnons quelques illustrations de cette affirmation.



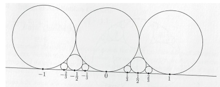
Théorème (de Miguel) *Soient C_1, C_2, C_3, C_4 quatre cercles qui se coupent comme sur la figure 10.9.7.2. Si les points a, b, c, d, sont sur un même cercle - ce qui est le cas sur la figure, alors les points a', b', c', d' sont aussi sur un même cercle.*

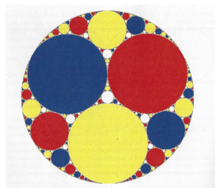




Théorème (de Steiner) *Si la boucle des cercles finit par se refermer à partir d'un cercle donné, elle finit par se refermer à partir de n'importe quel cercle.*

Théorème (de Poncelet pour les cercles) *Si la suite des tangentes au cercle intérieur* *finit par se refermer à partir d'un point donné, elle finit par se refermer à partir de n'importe quel point.*

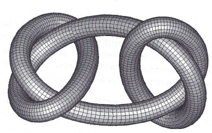


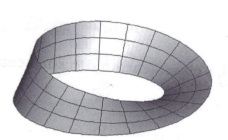


Les badernes d'Apollonius

Lorsque l'on trace à l'infini des cercles tangents comme sur la figure, il apparaît de surprenants phénomènes d'arithmétique. Ceci est dû à la relation de Descartes qui relie les courbures de quatre cercles tangents chacun avec les trois autres.

Les cercles en réunion



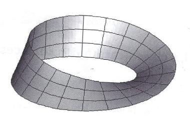


Le tore comme la bande de Moebius est une réunion de cercles un peu tordue, surtout dans le second cas. Nous commenterons ci-dessous les figures que vous pouvez admirer.

III. Le cercle se ramollit

Après le grand siècle (avec Pascal, Descartes, Desargues), nous nous transportons au XX-ième siècle où le cercle est considéré à déformation continue près, c'est-à-dire non plus comme un objet métrique ou même affine ou projectif comme nous venons de le voir, mais comme une simple courbe qui se referme, qui se trouve dans un espace quelconque. Cela peut donner un objet de ce genre :

Une idée majeure due en partie à Henri Poincaré est de faire de ces (images de) cercles les outils fondamentaux qui restituent des informations sur une surface que nous considérons et permettent ainsi de classer les surfaces (et les objets de plus grande dimension). Par exemple la bande de Moebius qui est une réunion un peu tordue de cercles, et qui de ce fait, nous surprend lorsque l'on prend une paire de ciseaux pour tenter de la découper. Des surprises nous attendent !



IV. Échappées belles

Nous donnons à lire ici un poème puis deux extraits d'un court et brillant essai sur la création artistique. Dans un cas comme dans l'autre, les mathématiques ne sont pas loin et vous pourrez tout à loisir méditer sur les rapports que la Littérature, l'Art et la Science - en particulier la Mathématique - peuvent entretenir entre eux.

Jacques Peletier du Mans
(1517 - 1582)
À ceux qui blâment
les mathématiques

Tant plus je vois que vous blâmez
Sa noble discipline
Plus à l'aimer vous enflammez
Ma volonté incline.

Car ce qui a moins de suivants,
D'autant plus il est rare,
Et est la chose entre vivants
Dont on est plus avare.

Il n'est pas en votre puissance
Qu'y soyez adonnés ;
Car le ciel dès votre naissance
Vous en a détournés ;

Ou ayant persuasion
Que tant la peine en coûte,
Est la meilleure occasion
Qui tant vous en dégoûte.

Le ciel orné de tels flambeaux
N'est-il pas admirable ?
La notice de corps si beaux
N'est-elle désirable ?

Du céleste ouvrage l'objet,
Si vrai et régulier,
N'est-il sur tout autre sujet
Beau, noble et singulier ?

N'est-ce rien d'avoir pu prévoir
Par les cours ordinaires,
L'éclipse que doit recevoir
L'un des deux Luminaires ?

D'avoir su, par vraies pratiques,
Les aspects calculer ?
Et connaître les Erratiques
Marcher ou reculer ?

Toutefois, il n'est ja besoin
Que tant fort je la loue
Vu que je n'ai vouloir ni soin
Que de ce que l'on m'avoue ;

Car que chaut-il à qui l'honore
Qu'elle soit contemnée ?
Science, de cil qui l'ignore,
Est toujours condamnée.

Assez regarde l'indocte homme
Du ciel rond la ceinture,
Mais il s'y connaît ainsi comme
L'aveugle en la peinture.

Celui qui a l'âme ravie
Par les cieux va et passe,
Et soudain voit durant sa vie
D'en haut la terre basse.

Cette science l'homme cueille
Alors qu'il imagine
La facture et grande merveille
De la ronde machine.

C'est celle par qui mieux s'apprenne
L'immense Déité ,
Et qui des athés reprenne
Erreur et vanité.

Jacques Peletier du Mans fut un des sept poètes de la pléiade avec Joachim du Bellay et Pierre de Ronsard. Outre son oeuvre littéraire composée de poèmes et aussi de traductions (Homère, Virgile,etc.) il nous a donné sa version des éléments d'Euclide. Jacques Peletier du Mans fut aussi médecin et mathématicien.

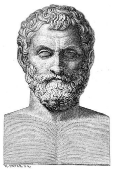
Paul Valéry
(1871 - 1945)
Extraits de *l'Introduction à la méthode de Léonard de Vinci*

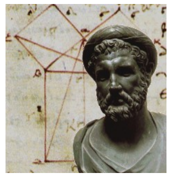
... Mais si toutes les facultés de l'esprit choisies sont largement développées à la fois, ou si les restes de son action paraissent considérables dans tous les genres, la figure en devient de plus en plus difficile dans son unité et tend à échapper à notre effort. D'une extrémité de cette étendue mentale à une autre, il y a de telles distances que nous n'avons jamais parcourues. La continuité de cet ensemble manque à notre connaissance, comme s'y dérobent ces informes haillons d'espace qui séparent des objets connus, et traînent au hasard des intervalles ; comme se perdent à chaque instant des myriades de faits, hors du petit nombre de ceux que le langage éveille...

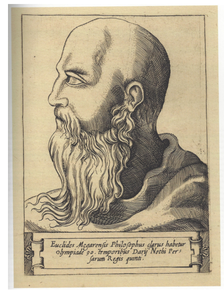
... Je me propose d'imaginer un homme de qui auraient paru des actions tellement distinctes que si je viens à leur supposer une pensée, il n'y en aura pas de plus étendue. Et je veux qu'il est un sentiment de la différence des choses infiniment vif, dont les aventures pourraient bien se nommer analyse. Je vois que tout l'oriente : c'est à l'univers qu'il songe toujours, et à la rigueur. ...

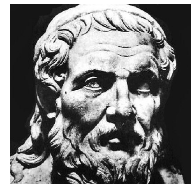
Il s'agit de deux extraits de *L'introduction à la méthode de Léonard de Vinci* de Paul Valéry. Paul Valery imagine dans cet essai l'Artiste idéal, universel, que Léonard de Vinci incarne dans son esprit. Le texte, au moins pour le rédacteur de cette note, renvoie continuellement par le lexique et les métaphores, au langage et à la démarche même du mathématicien, dans sa quête d'universel, à travers la compréhension des structures. Une différence avec l'Art, souligne Valéry, est que l'on peut imaginer un texte mathématique sans auteur :... *"Certains travaux des sciences, ceux des mathématiques en particulier, présentent une telle limpidité de leur armature qu'on les dirait l'oeuvre de personne."*

V. Une galerie de portraits

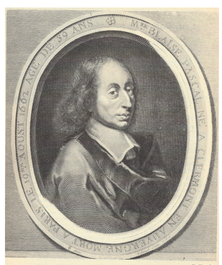




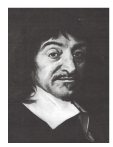




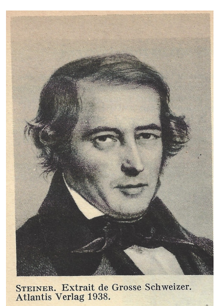
Thales **Pythagore** **Euclide** **Apollonius**



Blaise PASCAL (1623 - 1662)



Pascal **Descartes**



Jacob STEINER

Steiner **Poincaré**

Exercice

1°) Dresser une courte biographie de chacun de ces mathématiciens et/ou philospohe.

2°) Écrire une lettre de Thalès à Pythagore, et la réponse de Pythagore.

3°) Reprendre la question précédente avec Pascal et Descartes (qui n'a pas été des plus amènes en recevant *l'Essai pour les coniques*).

4°) Reprendre la question 2 avec Euclide et Poincaré (c'est d'abord Euclide qui écrit à Poincaré).

Références

[1] Bartocci C., Odifreddi P. (sous la direction de) *La mathématique I : Les lieux et les temps* CNRS Éditions 2009 (traduit de l'italien).

[2] Benoît P. & Micheau F. *L'intermédiaire arabe ?*, - *in* Éléments d'Histoire des Sciences, sous la direction de M. Serres ,

[3] Blay M. & Halleux R. *La science classique XVI*^{e}*-XVIII*^{e} *siècle Dictionnaire critique*, Flammarion 1998.

[4] Brunschwig J., Lloyd G. & Pellegrin P. *Le savoir grec*, Édition revue et augmentée, Flammarion 2011.

[5] Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Points, Seuil 1986.

[6] Dedron, Itard. *Mathématiques et mathématiciens*

[7] Fowler D. . *The mathematics of Plato's Academy : A new reconstruction*, Second Edition Clarendon Press Oxford 2003.

[8] Ifrah G. *Histoire universelle des chiffres*, L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul. Vol. 1 & 2, Collection Bouquins, R. Laffont 2003

[9] Hauchecorne B. & Surateau D. *Des mathématiciens de A à Z* 3-ième édition, Ellipses, 2008

[10] Heath Sir T. *A History of greek mathematics*, Volume I & II Dover Editions 1981.

[11] Pichot A. *La naissance de la science* , Vol. 1 Mésopotamie, Egypte. Gallimard , Collection Folio Essais , 1991.

[12] Pichot A. *La naissance de la science* , Vol. 2 Grèce présocratique. Gallimard , Collection Folio Essais , 1991.

[13] Taton R. (sous la direction de)*Histoire générale des Sciences*, Tomes 1 à 4, Seconde édition P.U.F. 1966.

Voici quelques commentaires au sujet des ouvrages qui nous paraissent les plus importants au regard de la rédaction de cette note.

S'il n'y avait qu'un seul livre à proposer au regard critique du lecteur (relativement novice) je retiendrais [5]. Cet ouvrage allie concision, efficacité et rigueur scientifique pour proposer quelques chemins à travers l'histoire des mathématiques, de la genèse à l'organisation du savoir dans une forme quasi actuelle, donc en s'arrêtant, pour chaque terme abordé et qui s'y prête, aux portes de la recherche mathématique. La lecture nous semble aisée (même si quelques passages pourront apparaître quelque peu techniques) et le choix des thèmes donnent de solides repères de la constitution du savoir mathématique, et partant, offrent une ouverture à celles et ceux qui ont souffert d'un apprentissage trop formel de ce que la nomenclature scolaire appelle une matière alors qu'il s'agit d'une véritable science (personne n'en doute d'ailleurs) avec ses errements, et ses découvertes splendides ou formidables, à tous les sens. Chaque route proposée se termine par des indications bibliographiques choisies avec précision, comme autant de pistes supplémentaires offertes. Une indication d'ouvrages de portée plus générale est proposée à la fin. A propos du sujet qui nous a occupé, nous recommandons la lecture des chapitres 1, 2 (en particulier 2.8 et la théorie des proportions), 3 (en particulier 3.10) et 5 (jusqu'à 5.8). Nous allons jusqu'à penser qu'un tel ouvrage devrait être un *manuel* de cours à l'adresse des étudiants en mathématiques, incités alors à repenser l'ordonnancement du savoir qu'ils auront à présenter, réconciliant l'Histoire dont l'enseignement élude en général ce pan de la connaissance, et les mathématiques, dont l'enseignement, dualement, ne fait pas mieux.

Le second ouvrage qui doit être mentionné, même s'il occupe une place à part, est [8]. Nous le tenons pour singulier, pour les raisons suivantes.
L'auteur considère les nombres entiers, et aborde les questions de la perception du nombre depuis les temps préhistoriques, de leurs diverses représentations, de leur évolution au cours du temps, leurs influences mutuelles, et aussi celles des différents systèmes de numération (origine, influence, adéquation aux opérations élémentaires, etc.). Le corps principal de l'ouvrage traite de l'origine du système de numération adopté en occident (numération de position en base 10, représentation par les chiffres dits arabes, voir XXX). La tâche assignée n'est pas à l'échelle humaine, tant les sujets abordés nécessitent de compétences multiples. En outre, l'auteur se met en scène, donnant de la couleur au texte mais rendant suspecte sa démarche scientifique. Cette réserve énoncée, il s'agit incontestablement d'une somme, d'une mine inépuisable d'informations, qui permet de situer bien des questions et des avancées sur la connaissance de la représentation du nombre à travers les civilisations. La charge de

vérification implicite n'est-elle pas au fond celle qui nous revient après toute lecture ?
Enfin, l'Histoire des Sciences en quatre tomes [13], mérite une lecture sélective, si l'on ne s'intéresse qu'au développement de la pensée mathématique. Il s'agit d'une référence généraliste solide, qui offre une vue d'ensemble du développement de la connaissance et de la pensée scientifiques. Tous les champs sont abordés, et les liens qui les unissent aussi, ce qui en constitue le premier intérêt.