

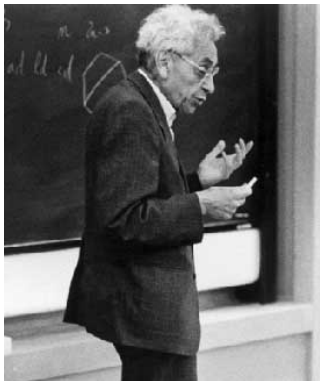
# Comment obtenir des résultats certains grâce aux probabilités ?

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans  
CNRS, UMR 7013  
<https://www.idpoisson.fr/berglund/>

Centre Galois, Juin 2021

# Le mathématicien Paul Erdős



Paul Erdős (26 mars 1913 – 20 septembre 1996)

Auteur d'environ 1500 articles de recherche

Inventeur de la «méthode probabiliste »

# Exemple : organisation d'un tournoi

Peu importe le type de jeu : foot, tennis, ping-pong, chifoumi (pierre-feuille-ciseaux), ...

## Règles :

- ▷ On a un certain nombre de joueurs (disons 16 galoisiens)
- ▷ Chacun affronte chacun
- ▷ Dans chaque match, il y a un gagnant et un perdant (pas d'ex-æquo)

# Exemple : organisation d'un tournoi

Peu importe le type de jeu : foot, tennis, ping-pong, chifoumi (pierre-feuille-ciseaux), ...

## Règles :

- ▷ On a un certain nombre de joueurs (disons 16 galoisiens)
- ▷ Chacun affronte chacun
- ▷ Dans chaque match, il y a un gagnant et un perdant (pas d'ex-æquo)

## Questions :

- ▷ Combien de parties sont jouées ?
- ▷ Combien d'issues (résultats) possibles y a-t-il ?
- ▷ Certains joueurs sont-ils meilleurs que d'autres ?

# Compter les parties

Anaël

Adrien

# Compter les parties

Anaël

Adrien

---

Anaël

Adrien

Cassandra

# Compter les parties

Anaël

Adrien

Cassandra

Elie

# Et pour $N$ joueurs ?

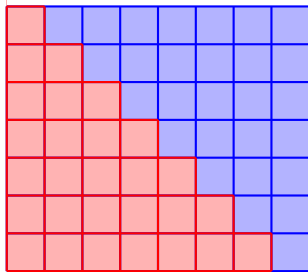


# Carl Friedrich Gauß (Gauss)



Carl Friedrich Gauß (30 avril 1777 – 23 février 1855)

# Et pour $N$ joueurs ?

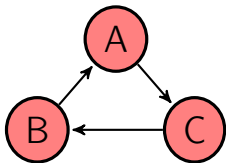
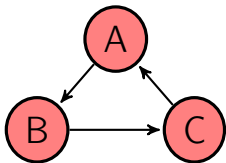
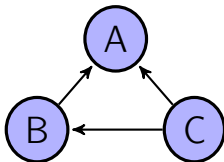
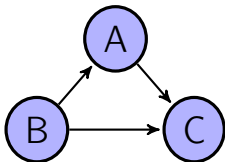
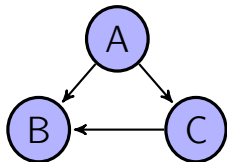
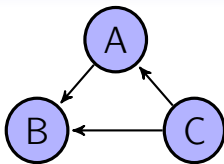
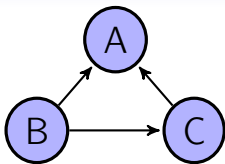
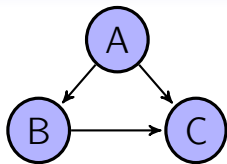


$$1 + 2 + 3 + \dots + 7 =$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + N =$$

# Nombre d'issues possibles du tournoi

# Différents types d'issues



# Tournois indécis

## Définition

Nous dirons qu'un tournoi est *indécis* s'il existe des issues dans lesquelles chaque joueur a été battu par un autre joueur.

# Tournois indécis

## Définition

Nous dirons qu'un tournoi est *indécis* s'il existe des issues dans lesquelles chaque joueur a été battu par un autre joueur.

## Théorème

Tout tournoi avec au moins 3 joueurs est indécis.

# Tournois 2-indécis

## Définition

Nous dirons qu'un tournoi est *2-indécis* s'il existe des issues dans lesquelles **chaque paire de joueurs** a été battue par un troisième joueur.

## Existe-t-il des tournois 2-indécis ?





# La méthode probabiliste

**Idée :** Supposons que chaque match a une chance sur 2 d'être gagné par chaque joueur (indépendamment de tous les autres matchs)

# La méthode probabiliste

**Idée :** Supposons que chaque match a une chance sur 2 d'être gagné par chaque joueur (indépendamment de tous les autres matchs)

## Principe de la méthode probabiliste

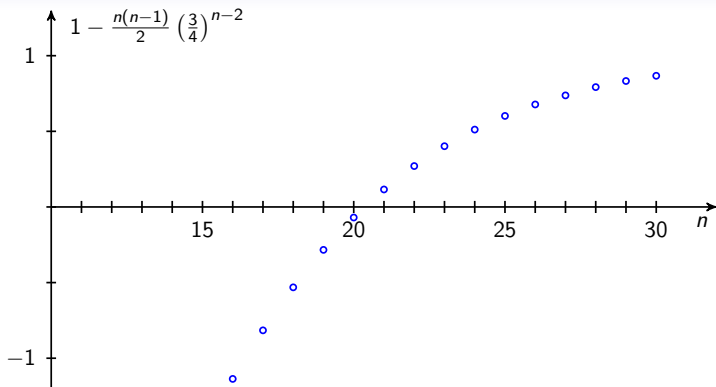
Soit  $p$  la probabilité qu'un match soit 2-indécis.

Si  $p > 0$ , alors il existe au moins une issue 2-indécise, donc le tournoi est 2-indécis.

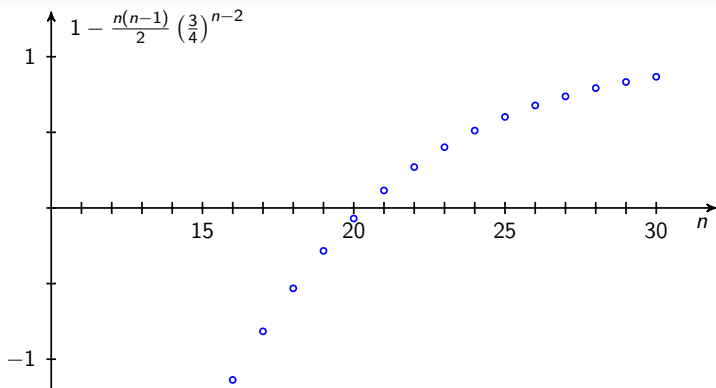
# Calcul de la probabilité

# Calcul de la probabilité

# Calcul de la probabilité



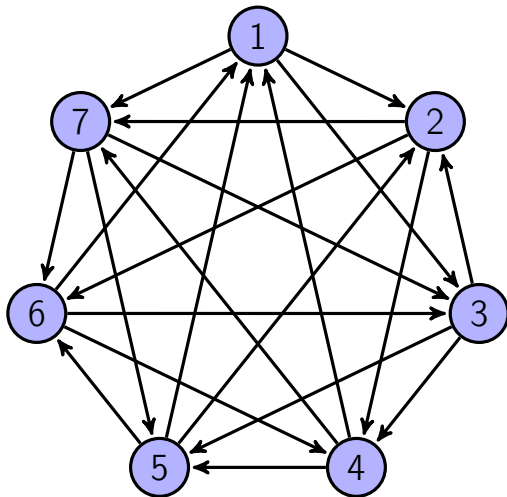
# Calcul de la probabilité



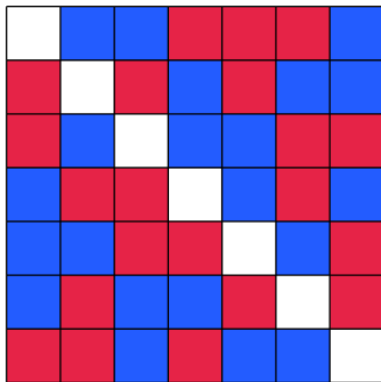
## Théorème

Il existe des tournois 2-indécis dès que le nombre de joueurs est au moins égal à 21.

# Le plus petit tournoi 2-indécis



# Le plus petit tournoi 2-indécis





# Tournois $k$ -indécis

## Définition

Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 2. Nous dirons qu'un tournoi est  $k$ -indécis s'il existe des issues dans lesquelles chaque groupe de  $k$  joueurs a été battu par un autre joueur.

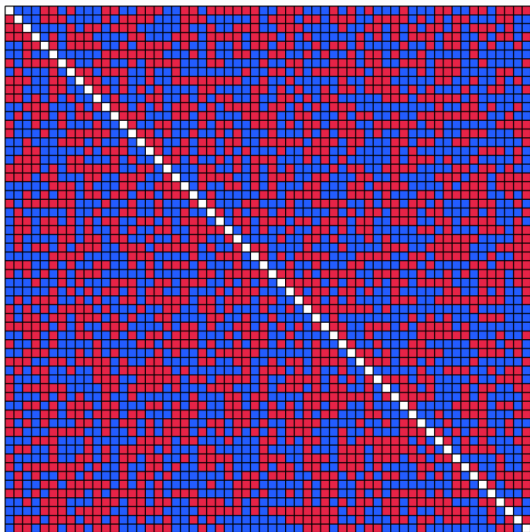
# Tournois $k$ -indécis

## Théorème

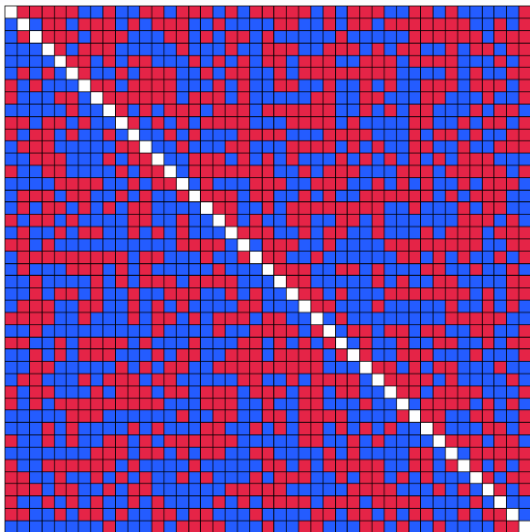
Pour tout  $k \geq 1$ , il existe des tournois  $k$ -indécis dès que le nombre  $n$  de joueurs est assez grand. Plus précisément, de tels tournois existent dès que

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k} < 1$$

# Un tournoi 3-indécis à 60 joueurs



# Un tournoi 3-indécis à 43 joueurs



# Pour en savoir plus

- ▷ Articles dans Images des mathématiques :

<https://images.math.cnrs.fr/Probabiliser.html>

- ▷ Simulations sur YouTube :

<https://www.youtube.com/c/NilsBerglund>

- ▷ Cette présentation :

<https://www.idpoisson.fr/berglund/Galois21.pdf>

(et bien entendu sur <http://centre-galois.fr>)