Résoudre des équations par le dessin

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans
CNRS, UMR 7013
https://www.idpoisson.fr/berglund/

Centre Galois, Juin 2019

Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1\,, \dfrac{1}{2}\,, \dfrac{1}{4}\,, \dfrac{1}{8}\,,$

Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} , \dots , \frac{1}{2^n} , \dots$

Un premier exemple

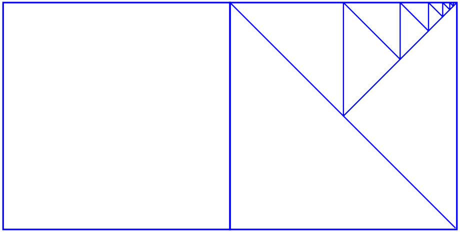
Voici une suite de nombres : $1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \frac{1}{16}\ ,\ \frac{1}{32}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{1}{2^n}\ ,\ \dots$

Combien vaut $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$?

Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\,,\frac{1}{32}\,,\dots\,,\frac{1}{2^n}\,,\dots$

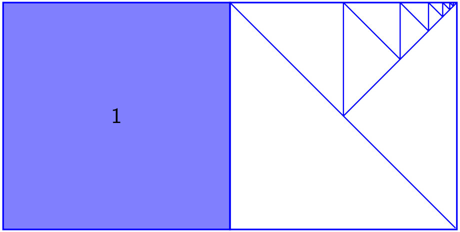
Combien vaut $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$?



Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{4}\,, \frac{1}{8}\,, \frac{1}{16}\,, \frac{1}{32}\,, \dots\,, \frac{1}{2^n}\,, \dots$

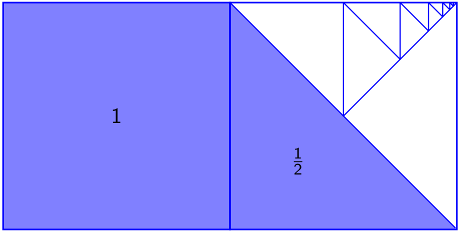
Combien vaut $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$?



Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\,,\frac{1}{32}\,,\dots\,,\frac{1}{2^n}\,,\dots$

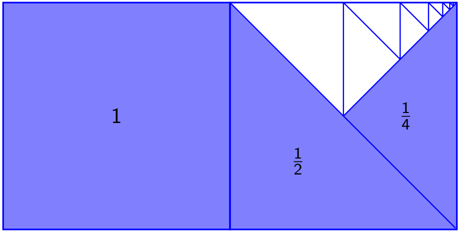
Combien vaut $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$?



Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1 \, , \frac{1}{2} \, , \frac{1}{4} \, , \frac{1}{8} \, , \frac{1}{16} \, , \frac{1}{32} \, , \dots \, , \frac{1}{2^n} \, , \dots$

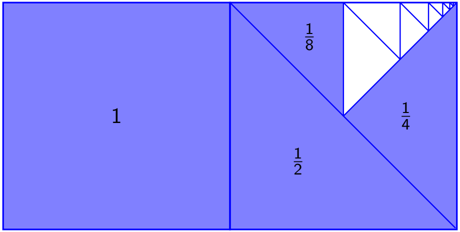
Combien vaut $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$?



Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\,,\frac{1}{32}\,,\dots\,,\frac{1}{2^n}\,,\dots$

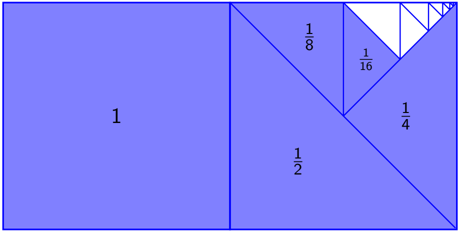
Combien vaut $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\dots$?



Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1 \, , \frac{1}{2} \, , \frac{1}{4} \, , \frac{1}{8} \, , \frac{1}{16} \, , \frac{1}{32} \, , \dots \, , \frac{1}{2^n} \, , \dots$

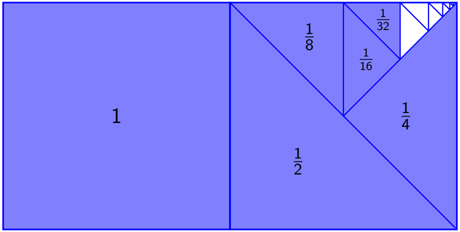
Combien vaut $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$?



Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} , \dots , \frac{1}{2^n} , \dots$

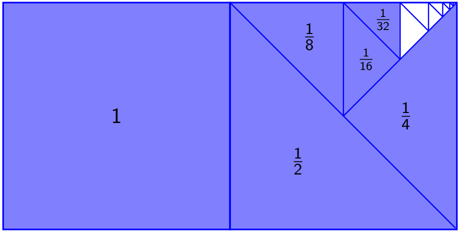
Combien vaut $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \dots$?



Un premier exemple

Voici une suite de nombres : $1\ ,\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{8}\ ,\frac{1}{16}\ ,\frac{1}{32}\ ,\dots\ ,\frac{1}{2^n}\ ,\dots$

Combien vaut $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$?

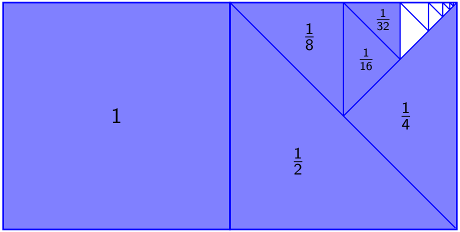


$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=2$$

Un premier exemple

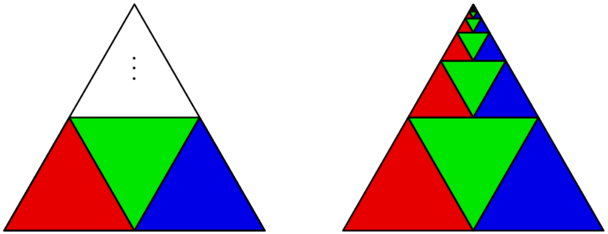
Voici une suite de nombres : $1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\,,\frac{1}{32}\,,\dots\,,\frac{1}{2^n}\,,\dots$

Combien vaut $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$?



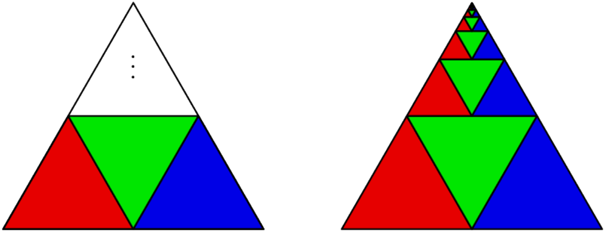
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=2$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=1$$

Un deuxième exemple



Source : https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words#Geometric_Series

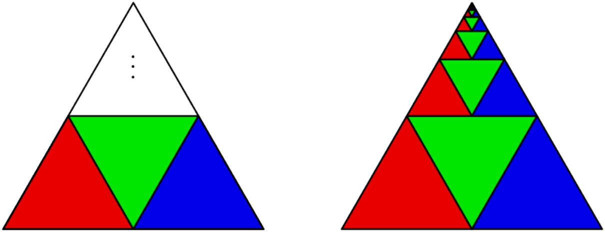
Un deuxième exemple



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots =$$

Source : https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words#Geometric_Series

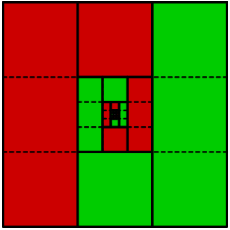
Un deuxième exemple



$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{1}{3}$$

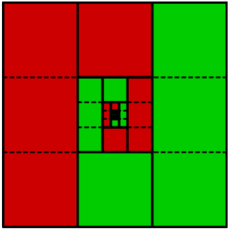
Source : https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words#Geometric_Series

Un troisième exemple (un peu plus difficile. . .)



Source : https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words#Geometric_Series

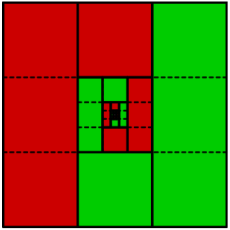
Un troisième exemple (un peu plus difficile...)



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots =$$

Source : https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words#Geometric_Series

Un troisième exemple (un peu plus difficile...)



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots=\frac{1}{2}$$

Source : https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words#Geometric_Series

Premier exemple d'équation

$0{,}9 \cdot x = 1$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9}$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99}$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 + ax$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned}(1-a)x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1+ax)\end{aligned}$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned}(1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2x\end{aligned}$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned}(1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x &= 1 + ax\\ &= 1 + a(1+ax)\\ &= 1 + a + a^2x\\ &= 1 + a + a^2(1+ax)\end{aligned}$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned}(1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2x \\ &= 1 + a + a^2(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2 + a^3x\end{aligned}$$

Premier exemple d'équation

$$0{,}9 \cdot x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\dots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\dots$$

$$(1-a)x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned}(1-a)x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2x \\ &= 1 + a + a^2(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2 + a^3x \\ &= \dots \\ &= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \quad ?\end{aligned}$$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots$$ (pour certains a)

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots$$ (pour certains a)

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots$$ (pour certains a)

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots$$ (pour certains a)

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

  C'est le premier exemple !

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \;= 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

  C'est le premier exemple !

  Attention, cela ne marche pas toujours. . .
- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0}$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \; = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

  C'est le premier exemple !

  Attention, cela ne marche pas toujours...
- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

  C'est le premier exemple !

  Attention, cela ne marche pas toujours...
- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$
- $a = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$

Conjecture

On a $\qquad \dfrac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad$ (pour certains a)

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

  C'est le premier exemple !

  Attention, cela ne marche pas toujours...
- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$
- $a = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} \qquad 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = ???$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \; = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

  C'est le premier exemple !

  Attention, cela ne marche pas toujours...
- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$
- $a = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} \qquad 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = ???$
- $a = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{1-2} = -1$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

  C'est le premier exemple !

  Attention, cela ne marche pas toujours...
- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$
- $a = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} \qquad 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = ???$
- $a = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{1-2} = -1 \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \infty$

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a(1+a+a^2+\cdots+a^n)\end{aligned}$$

$\square$

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad -a(1+a+a^2+\cdots+a^n) \\ &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad -a-a^2-\cdots-a^n-a^{n+1}\end{aligned}$$

□

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1 + a + a^2 + \dots + a^n) &= 1 + a + a^2 + \dots + a^n \\ &\quad - a(1 + a + a^2 + \dots + a^n) \\ &= 1 + a + a^2 + \dots + a^n \\ &\quad - a - a^2 - \dots - a^n - a^{n+1} \\ &= 1 - a^{n+1}\end{aligned}$$

□

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a(1+a+a^2+\cdots+a^n) \\ &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad -a-a^2-\cdots-a^n-a^{n+1} \\ &= 1-a^{n+1}\end{aligned}$$

Par conséquent, si $a \neq 1$, alors $1+a+a^2+\cdots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

□

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a(1+a+a^2+\cdots+a^n) \\ &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a - a^2 - \cdots - a^n - a^{n+1} \\ &= 1 - a^{n+1}\end{aligned}$$

Par conséquent, si $a \neq 1$, alors $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Or $a^{n+1} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ si et seulement si $-1 < a < 1$. $\square$

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire mots de 2 lettres :

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire mots de 3 lettres :

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire   mots de n lettres

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 2^n mots de n lettres

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 2^n mots de n lettres

Parmi ces 2^n mots, combien ont k lettres a et $n-k$ lettres b ?

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 2^n mots de n lettres

Parmi ces 2^n mots, combien ont k lettres a et $n-k$ lettres b ?

On note ce nombre $\binom{n}{k}$. Par exemple $\binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{2} = 2$, $\binom{2}{1} = 2$.

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 2^n mots de n lettres

Parmi ces 2^n mots, combien ont k lettres a et $n-k$ lettres b ?

On note ce nombre $\binom{n}{k}$. Par exemple $\binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{2} = 2$, $\binom{2}{1} = 2$.

Identités remarquables :
$(a+b)^2 =$

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 2^n mots de n lettres

Parmi ces 2^n mots, combien ont k lettres a et $n-k$ lettres b ?

On note ce nombre $\binom{n}{k}$. Par exemple $\binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{2} = 2$, $\binom{2}{1} = 2$.

Identités remarquables :
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 2^n mots de n lettres

Parmi ces 2^n mots, combien ont k lettres a et $n-k$ lettres b ?

On note ce nombre $\binom{n}{k}$. Par exemple $\binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{2} = 2$, $\binom{2}{1} = 2$.

Identités remarquables :
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 =$

Un peu de combinatoire

Avec les lettres a et b, on peut écrire 4 mots de 2 lettres : $\underbrace{aa}_{2a}, \underbrace{ab, ba}_{1a,1b}, \underbrace{bb}_{2b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 8 mots de 3 lettres :
$\underbrace{aaa}_{3a}, \underbrace{aab, aba, baa}_{2a,1b}, \underbrace{abb, bab, bba}_{1a,2b}, \underbrace{bbb}_{3b}$

Avec les lettres a et b, on peut écrire 2^n mots de n lettres

Parmi ces 2^n mots, combien ont k lettres a et $n-k$ lettres b ?

On note ce nombre $\binom{n}{k}$. Par exemple $\binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{2} = 2$, $\binom{2}{1} = 2$.

Identités remarquables :

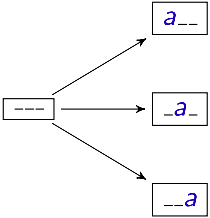
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Les coefficients binomiaux

Mots avec les 3 lettres a, a, b :

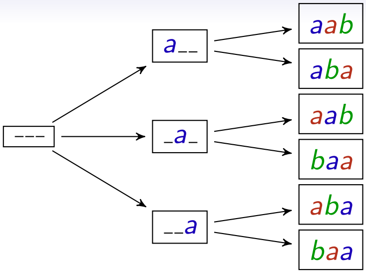
Il y a 3 manières de placer a.



Les coefficients binomiaux

Mots avec les 3 lettres a, a, b :
Il y a 3 manières de placer a.

Pour chacune de ces 3 manières, il y a 2 choix pour placer a, puis 1 choix pour placer b. Soit 6 mots en tout.

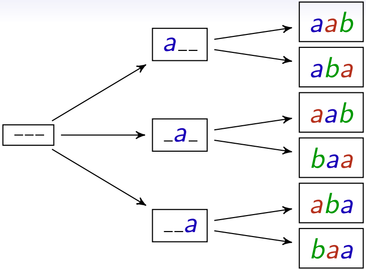


Les coefficients binomiaux

Mots avec les 3 lettres a, a, b :
Il y a 3 manières de placer a.

Pour chacune de ces 3 manières, il y a 2 choix pour placer a, puis 1 choix pour placer b. Soit 6 mots en tout.

Si $a = a$, il reste $\frac{6}{2} = 3$ mots.

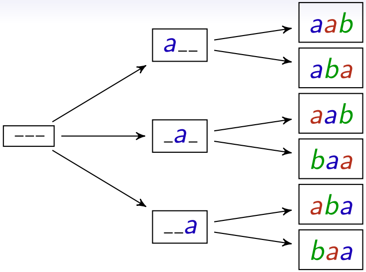


Les coefficients binomiaux

Mots avec les 3 lettres a, a, b :
Il y a 3 manières de placer a.

Pour chacune de ces 3 manières, il y a 2 choix pour placer a, puis 1 choix pour placer b. Soit 6 mots en tout.

Si $a = a$, il reste $\frac{6}{2} = 3$ mots.



Théorème

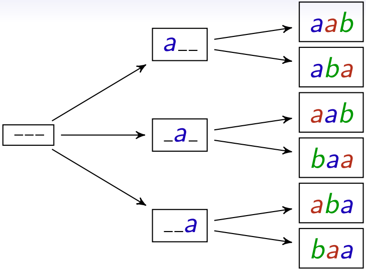
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}$$

Les coefficients binomiaux

Mots avec les 3 lettres a, a, b :
Il y a 3 manières de placer a.

Pour chacune de ces 3 manières, il y a 2 choix pour placer a, puis 1 choix pour placer b. Soit 6 mots en tout.

Si $a = a$, il reste $\frac{6}{2} = 3$ mots.



Théorème

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}$$

Exemples :

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3 \qquad \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \qquad \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Le triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6 ...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
...							

Le triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6 ...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
...							

$$(a+b)^4 =$$
$$(a+b)^5 =$$
$$(a+b)^6 =$$

Le triangle de Pascal

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6 ...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
...							

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 =$$
$$(a+b)^6 =$$

Le triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6 ...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
...							

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 =$$

Le triangle de Pascal

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6 …
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
…							

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Une équation du second degré

Considérons l'équation

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

Une équation du second degré

Considérons l'équation

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

Théorème

Soit l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On suppose $a \neq 0$. *Soit* $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant. Alors*

- *si* $\Delta > 0$, *l'équation admet deux solutions réelles* $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$;
- *si* $\Delta = 0$, *l'équation admet une unique solution* $-b/(2a)$;
- *si* $\Delta < 0$, *l'équation n'admet pas de solution réelle.*

Une équation du second degré

Considérons l'équation

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

Théorème

Soit l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On suppose $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant. Alors

- *si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$;*
- *si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $-b/(2a)$;*
- *si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.*

Dans notre cas, $b = -1$, $c = 1$ et donc $\Delta = 1 - 4a$.

Une équation du second degré

Considérons l'équation

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

Théorème

Soit l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On suppose $a \neq 0$*. Soit* $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant. Alors*

- *si* $\Delta > 0$*, l'équation admet deux solutions réelles* $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$*;*
- *si* $\Delta = 0$*, l'équation admet une unique solution* $-b/(2a)$*;*
- *si* $\Delta < 0$*, l'équation n'admet pas de solution réelle.*

Dans notre cas, $b = -1$, $c = 1$ et donc $\Delta = 1 - 4a$.
Donc si $a < \frac{1}{4}$, l'équation admet 2 solutions réelles

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}$$

Solution sous forme de série

$ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + ax^2$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4)
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\
&= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\
&= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4 \\
&= 1 + a + 2a^2 + (1 + 4x^2)a^3 + (4x^2 + 2x^4)a^4 + \dots
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\
&= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4 \\
&= 1 + a + 2a^2 + (1 + 4x^2)a^3 + (4x^2 + 2x^4)a^4 + \dots \\
&= 1 + a + 2a^2 + 5a^3 + 14a^4 + \dots
\end{aligned}$$

Solution sous forme de série

$$\begin{aligned} ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\ &= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\ &= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\ &= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\ &= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4 \\ &= 1 + a + 2a^2 + (1 + 4x^2)a^3 + (4x^2 + 2x^4)a^4 + \dots \\ &= 1 + a + 2a^2 + 5a^3 + 14a^4 + \dots \end{aligned}$$

Remarque : Cette série correspond à la solution $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\
&= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4 \\
&= 1 + a + 2a^2 + (1 + 4x^2)a^3 + (4x^2 + 2x^4)a^4 + \dots \\
&= 1 + a + 2a^2 + 5a^3 + 14a^4 + \dots
\end{aligned}
$$

Remarque : Cette série correspond à la solution $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}$

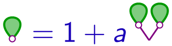
Question :

Y a-t-il un moyen plus simple de déterminer les coefficients

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 14, \quad \dots \quad ?$$

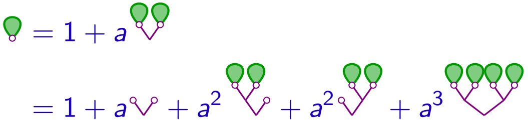
Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$



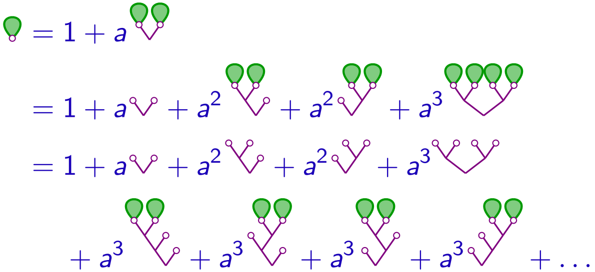
Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$



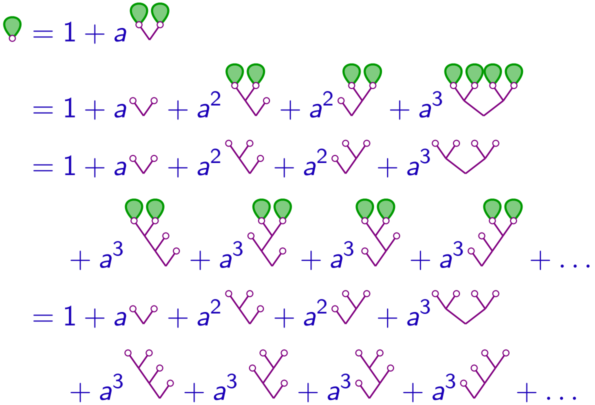
Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$



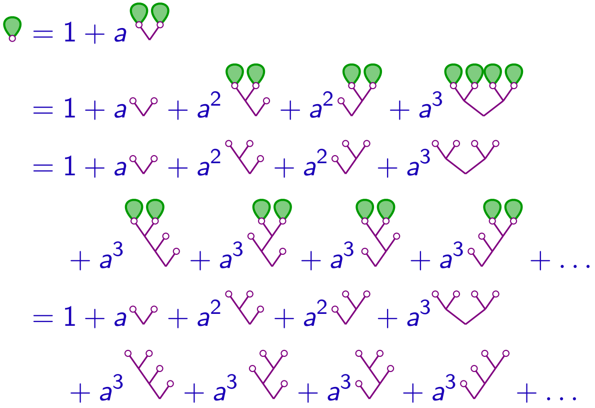
Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$



Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$



Observation :

Le coefficient de a^n est égal au nombre d'arbres binaires à $n+1$ feuilles.

Les nombres de Catalan

Notons C_n le nombre d'arbres binaires à $n+1$ feuilles. On l'appelle le $n$ième nombre de Catalan.

$C_0 = 1$	
$C_1 = 1$	
$C_2 = 2$	
$C_3 = 5$	
$C_4 = 14$	
$C_5 = ?$	
$\ldots$	

Eugène Charles Catalan (1814–1894)

Les nombres de Catalan

Notons C_n le nombre d'arbres binaires à $n+1$ feuilles. On l'appelle le $n$ième nombre de Catalan.

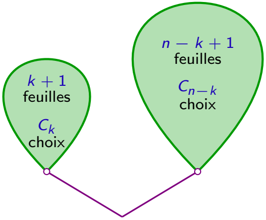
$C_0 = 1$	
$C_1 = 1$	
$C_2 = 2$	
$C_3 = 5$	
$C_4 = 14$	
$C_5 = ?$	
$\dots$	

Eugène Charles Catalan (1814–1894)

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, ...

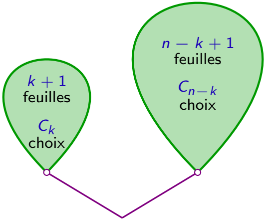
Une relation de récurrence

Un arbre binaire à $n+2$ feuilles est composé d'un arbre à $k+1$ feuilles et d'un arbre à $n-k+1$ feuilles avec $0 \leqslant k \leqslant n$.



Une relation de récurrence

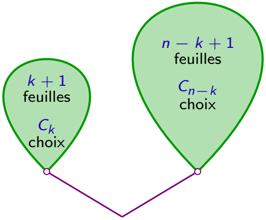
Un arbre binaire à $n+2$ feuilles est composé d'un arbre à $k+1$ feuilles et d'un arbre à $n-k+1$ feuilles avec $0 \leqslant k \leqslant n$.



$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0$$

Une relation de récurrence

Un arbre binaire à $n+2$ feuilles est composé d'un arbre à $k+1$ feuilles et d'un arbre à $n-k+1$ feuilles avec $0 \leqslant k \leqslant n$.



$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0$$

Exemples:

$$C_3 = C_0 C_2 + C_1^2 + C_2 C_0 = 2 + 1 + 2 = 5$$
$$C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$
$$C_5 = ?$$

Une autre formule pour les nombres de Catalan

Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

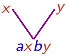
Une autre formule pour les nombres de Catalan

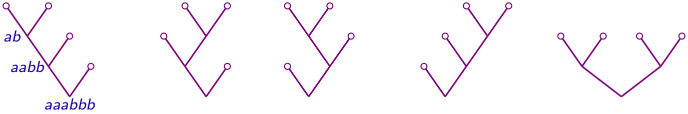
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





□

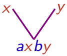
Une autre formule pour les nombres de Catalan

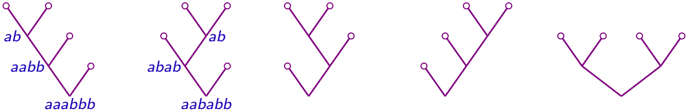
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :



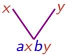


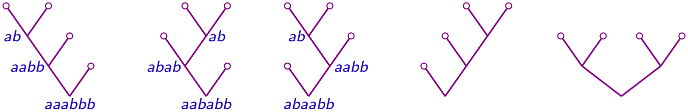
Une autre formule pour les nombres de Catalan

Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) : 



$\square$

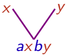
Une autre formule pour les nombres de Catalan

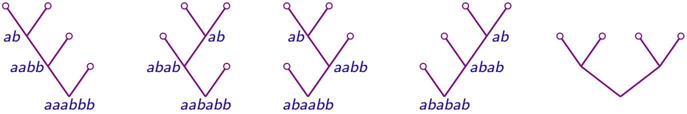
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





□

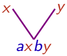
Une autre formule pour les nombres de Catalan

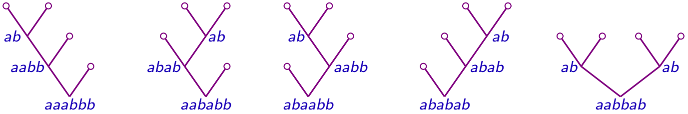
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





$\square$

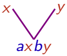
Une autre formule pour les nombres de Catalan

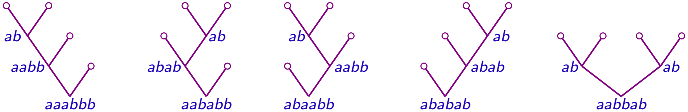
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

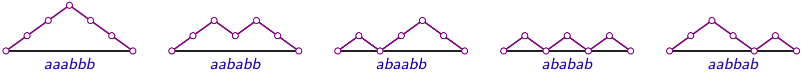
Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





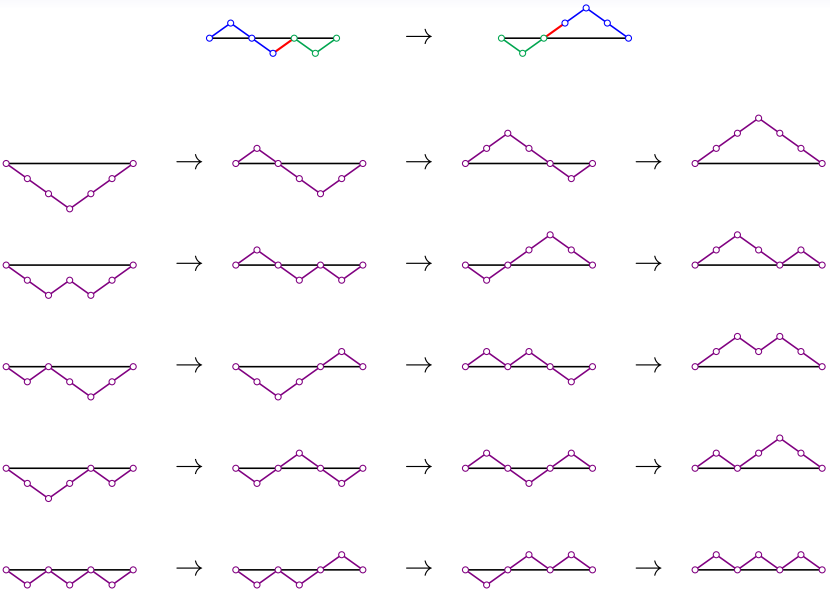
Puis on associe à chaque mot une ligne brisée avec $a \mapsto /$ et $b \mapsto \backslash$.



On obtient des "excursions" de $2n$ pas, restant au-dessus de l'abscisse (appelés chemins de Dyck), que l'on sait compter ... □

Compter les chemins de Dyck

Compter les chemins de Dyck



Résumé de cette partie

- Certaines équations admettent des solutions sous forme de série $x = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots$.
- Les coefficients $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ de cette série peuvent parfois être calculés par des méthodes graphiques.
- ⚠ La méthode ne donne pas toutes les solutions, et ne marche pas forcément pour toutes les valeurs du paramètre a.

Résumé de cette partie

- Certaines équations admettent des solutions sous forme de série $x = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots$.
- Les coefficients $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ de cette série peuvent parfois être calculés par des méthodes graphiques.
- ⚠ La méthode ne donne pas toutes les solutions, et ne marche pas forcément pour toutes les valeurs du paramètre a.

A méditer...

Comment résoudre les équations suivantes ?

$$ax^3 - x + 1 = 0$$

Résumé de cette partie

- Certaines équations admettent des solutions sous forme de série $x = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots$.
- Les coefficients $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ de cette série peuvent parfois être calculés par des méthodes graphiques.
- ⚠ La méthode ne donne pas toutes les solutions, et ne marche pas forcément pour toutes les valeurs du paramètre a.

A méditer...

Comment résoudre les équations suivantes ?

$$ax^3 - x + 1 = 0$$

$$ax^5 - x + 1 = 0$$

Résumé de cette partie

- Certaines équations admettent des solutions sous forme de série $x = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots$.
- Les coefficients $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ de cette série peuvent parfois être calculés par des méthodes graphiques.
- ⚠ La méthode ne donne pas toutes les solutions, et ne marche pas forcément pour toutes les valeurs du paramètre a.

A méditer...

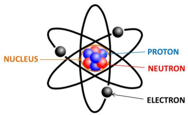
Comment résoudre les équations suivantes ?

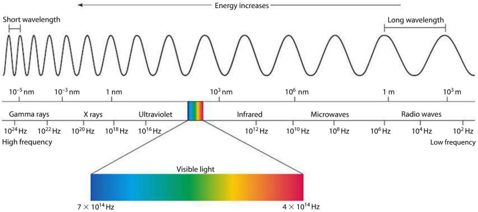
$$ax^3 - x + 1 = 0$$
$$ax^5 - x + 1 = 0$$
$$ax^2 - x + 2 = 0$$

La Physique à la fin du XIXe siècle

L'univers est constitué

de matière (formée d'atomes)	et d'ondes électromagnétiques

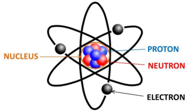




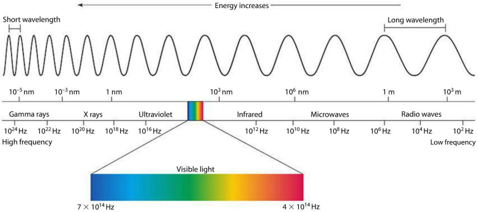
La Physique à la fin du XIXe siècle

L'univers est constitué

de matière (formée d'atomes)

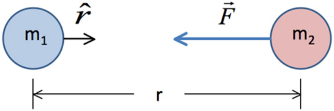


et d'ondes électromagnétiques



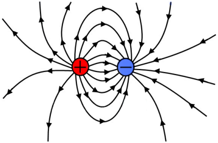
avec deux types d'interactions :

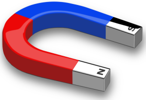
la gravitation



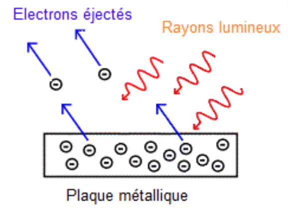
$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$$

et les forces électromagnétiques

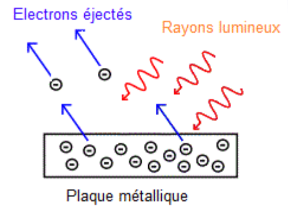
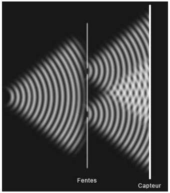
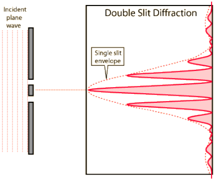




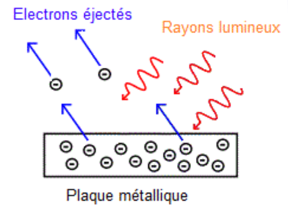
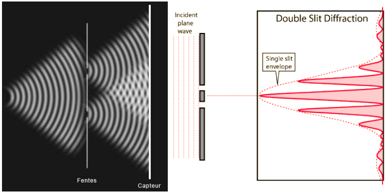
Début du XXe siècle : nouveaux phénomènes

L'effet photoélectrique	
Nombre d'électrons émis $\propto$ fréquence de la lumière $\rightarrow$ Les ondes électromagnétiques sont-elles composées de particules (les photons) ?	

Début du XXe siècle : nouveaux phénomènes

L'effet photoélectrique Nombre d'électrons émis $\propto$ fréquence de la lumière $\rightarrow$ Les ondes électromagnétiques sont-elles composées de particules (les photons) ?	
Expérience des fentes de Young Des particules envoyées sur deux fentes forment des franges d'interférences comme si c'était des ondes	 

Début du XXe siècle : nouveaux phénomènes

L'effet photoélectrique Nombre d'électrons émis $\propto$ fréquence de la lumière $\rightarrow$ Les ondes électromagnétiques sont-elles composées de particules (les photons) ?	
Expérience des fentes de Young Des particules envoyées sur deux fentes forment des franges d'interférences comme si c'était des ondes	

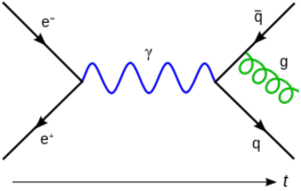
Nouvelles lois de la physique : la mécanique quantique

Équation de Newton $\rightarrow$ Équation de Schrödinger

Des nouveaux types d'interactions et de particules. . .

Richard Feynman (1918–1988)

Richard Feynman (1918–1988)



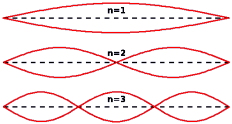
- Prix Nobel de Physique 1965 (avec Schwinger et Tomonoga) pour le développement de l'électrodynamique quantique
- Le Cours de physique de Feynman (titre original : Feynman Lectures on Physics)
- Collection d'anecdotes dans Vous voulez rire, monsieur Feynman ! (Surely You're Joking, Mr. Feynman!)
- Commission d'enquête sur l'accident de la navette spatiale Challenger

L'électrodynamique quantique (QED)

- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.

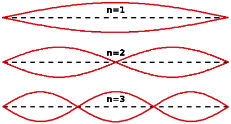
L'électrodynamique quantique (QED)

- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.



L'électrodynamique quantique (QED)

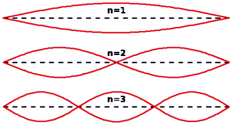
- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.



- La probabilité d'observer un photon au point x au temps t et un photon au point y au temps s s'écrit comme une covariance.

L'électrodynamique quantique (QED)

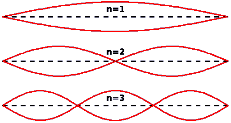
- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.



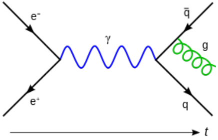
- La probabilité d'observer un photon au point x au temps t et un photon au point y au temps s s'écrit comme une covariance.
- Pour des photons seuls, on a une équation linéaire. L'interaction avec d'autres particules crée des termes non-linéaires.

L'électrodynamique quantique (QED)

- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.

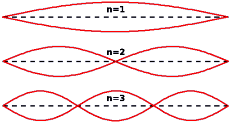


- La probabilité d'observer un photon au point x au temps t et un photon au point y au temps s s'écrit comme une covariance.
- Pour des photons seuls, on a une équation linéaire. L'interaction avec d'autres particules crée des termes non-linéaires.
- Richard Feynman a inventé une représentation graphique pour calculer une solution approximative sous forme de série : les diagrammes de Feynman.

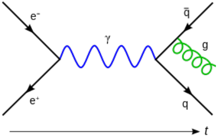


L'électrodynamique quantique (QED)

- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.



- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.
- La probabilité d'observer un photon au point x au temps t et un photon au point y au temps s s'écrit comme une covariance.
- Pour des photons seuls, on a une équation linéaire. L'interaction avec d'autres particules crée des termes non-linéaires.
- Richard Feynman a inventé une représentation graphique pour calculer une solution approximative sous forme de série : les diagrammes de Feynman.



- Ces méthodes graphiques sont aujourd'hui utilisées dans de nombreux domaines : théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser, équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS), . . .

Pour en savoir plus

- Articles dans Images des mathématiques :
  https://images.math.cnrs.fr/Resoudre-des-equations-en-comptant-des-arbres.html
  https://images.math.cnrs.fr/Les-diagrammes-de-Feynman-1.html
- Quand les maths prennent formes, Dossier Pour la Science no 91, 2016 :
  https://www.pourlascience.fr/sd/mathematiques/dossier-pour-la-science-91-751.php
- Sur YouTube :
  http://tinyurl.com/q43b6lf
- Cette présentation :
  https://www.idpoisson.fr/berglund/galois19.pdf
  (et bien entendu sur http://centre-galois.fr)