

FILMS ET BULLES

THIERRY DE PAUW

TABLE DES MATIÈRES

1. Quelques manipulations avec de l'eau savonneuse	1
2. Les observations de Joseph A.F. Plateau	8
3. Le problème de Steiner	9
4. Ruches d'abeilles	13
Références	14

1. QUELQUES MANIPULATIONS AVEC DE L'EAU SAVONNEUSE

On commence par créer un mélange d'eau et de savon dans un grand seau. Attention : si l'on y met d'abord le savon et l'eau ensuite, ou si l'on y verse le savon alors que l'eau coule d'un robinet, on obtient un mélange savonneux plein de petites bulles, comme lorsqu'on fait la vaisselle, ce qui est joli mais n'est pas notre but. On remplira donc d'abord le seau d'eau, puis l'on y versera du liquide vaisselle en le mélangeant délicatement (par exemple à l'aide d'une paille). Tous ces produits savonneux ne sont pas égaux devant nos bulles!¹

1. Voici ce qu'écrit E. Lamarle, dans son mémoire [2, Deuxième Partie §25] : «La préparation du liquide glycérique exige certaines précautions. Voici les principales, suivant les indications que M. Plateau a bien voulu nous donner pour le savon de Marseille et la glycérine française de Lamoureux, d'après de nouvelles recherches encore inédites : Prendre, à défaut d'eau distillée, de l'eau de pluie. En poids, trente parties d'eau pour une de savon. Débiter le savon en copeaux minces et le faire dissoudre dans l'eau à une chaleur modérée. Laisser refroidir la dissolution et, après l'avoir filtrée, la mêler à un volume égal de glycérine. Ce mélange doit être fait avec soin dans un flacon qu'on agite fortement et longtemps. Cela posé, achever comme il suit, d'après la saison : En été, laisser reposer le mélange pendant sept jours ; le plonger ensuite dans de l'eau entretenue à 5 ou 4 degrés au-dessus de zéro et l'y laisser six heures. Après cette immersion, pendant laquelle le mélange se trouble fortement, filtrer à travers du papier Prat-Dumas, en tenant plongé dans le filtre un bocal rempli de morceaux de glace. Le produit de la filtration donne, après six ou sept jours d'attente, un bon liquide glycérique. En hiver, déposer le mélange en un lieu où la température ne s'abaisse pas au-dessous de zéro et ne s'élève point au-dessus de 4° pour la nuit, de 9° pour le jour. Attendre ainsi pendant sept jours, puis filtrer à travers du papier Prat-Dumas, en ayant soin d'opérer à une température qui s'écarte peu de 4°. Le produit de la filtration est le liquide glycérique. Ainsi préparé, le liquide glycérique peut se conserver très longtemps ; plusieurs mois au



FIGURE 1. Des polygones plats prêts à être plongés dans l'eau savonneuse

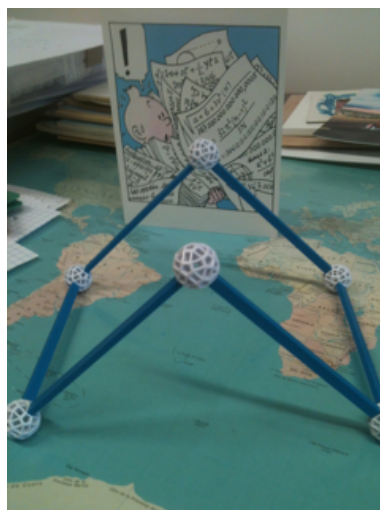


FIGURE 2. Un contour polygonal qui utilise 3 dimensions

On prépare ensuite quelques formes géométriques à l'aide de fil de fer ou d'un kit d'assemblage de polyèdres. Pour nos expériences, nous avons besoin de ceci :

- deux «polygones plats» pas trop petits, par exemple des carrés ou des rectangles ou des hexagones, voir figure 1 ;
- une «courbe polygonale» qui utilise 3 dimensions, voir figure 2 ;
- un *tétraèdre régulier*, voir figure 3 ;
- un cube, voir figure 4 ;
- et une paille.

Un *tétraèdre* est un polyèdre ayant quatre faces triangulaires, tandis qu'un cube est un polyèdre ayant six faces carrées. Le mot tétraèdre trouve son origine dans les mots grecs $\tau\epsilon\tau\rho\alpha$ qui signifie *quatre*, et $\epsilon\delta\rho\alpha$ qui signifie *face*. Et le mot cube : connaissez-vous son origine ?

moins, sinon plus d'une année. S'il se décompose ou s'altère, on le fait bouillir pendant quelques minutes. On le filtre ensuite à travers un tissu en coton serré.»

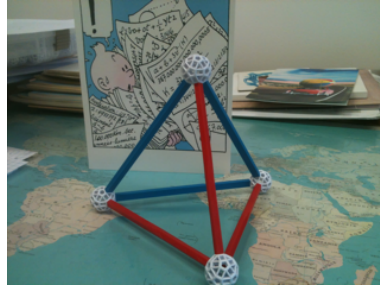


FIGURE 3. Un tétraèdre régulier

Un cube a six faces, huit sommets, et douze arêtes, tandis qu'un tétraèdre a quatre faces, quatre sommets et six arêtes. Après cet exercice élémentaire de comptage, il est temps de remonter nos manches !



FIGURE 4. Un cube !

Notre première expérience consiste à plonger un seul des «polygones plats» dans l'eau savonneuse, puis on l'en retire. On observe alors un film de savon qui s'est formé : il «remplit le trou» et s'appuie sur le contour polygonal qu'on a formé. Ce film de savon est plat, contenu dans le même plan que le contour polygonal. Si l'on impose délicatement un mouvement de va-et-vient, de haut en bas par exemple, au contour polygonal, le film de savon se bombe pour former quelque chose qui ressemble à un hémisphère, tantôt tourné vers le bas, tantôt tourné vers le haut. Cependant, lorsqu'on arrête le mouvement, le film reprend sa position initiale plate. La raison en est que le film minimise son *énergie potentielle*, qui est proportionnelle à son *aire* : il tend donc à utiliser le moins de surface possible pour «boucher le trou» imposé par le contour polygonal. En ce sens, le film de savon est ce qu'on appelle, en mathématiques, une *surface minimale*. Lorsque le contour

donné est «plat», comme dans l'expérience en cours, le film trouve sa position de surface minimale en restant dans le plan du contour. Mais que se passe-t-il si l'on remplace ce contour polygonal par un contour qui utilise trois dimensions ?

Lorsqu'on plonge notre «polygone à trois dimensions» dans l'eau savonneuse, il en ressort un film de savon qui, cette fois, n'est pas plat ! Il a choisi une position dans l'espace de façon à minimiser sa surface, tout en s'appuyant sur le contour imposé. La forme du film «en chaque point» est celle d'une «selle de cheval», voir figure 5.

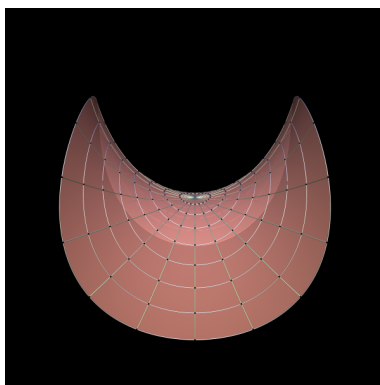


FIGURE 5. Une surface qui ressemble – en tout point – à une selle de cheval

Si l'on plonge dans l'eau savonneuse nos deux «polygones plats», il en ressortira peut-être une combinaison de surfaces plus complexe comme à la figure 6, et en passant sa main au travers du film savonneux au milieu, on crée un trou : la nouvelle surface obtenue, elle aussi, est en forme de «selle de cheval» en chacun de ses points. On l'appelle une *caténoïde*, voir 7.

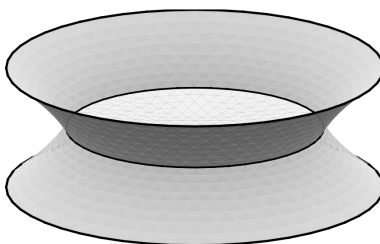


FIGURE 6. Deux morceaux de caténoïde et un disque

Quelle différence y a-t-il entre des films et des bulles de savon ? Par exemple, si je souffle une bulle à l'aide d'un kit bien connu, d'habitude destiné aux enfants plus jeunes, on observe un film de savon en forme de sphère : une bulle. Cette fois, le film ne s'appuie pas sur un contour donné, mais on l'a contraint à «enfermer un volume d'air donné» (celui contenu dans la bulle). Le film de savon a tendance à remplir cette

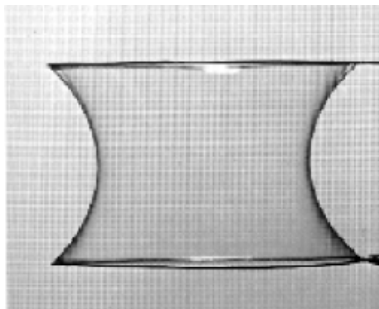


FIGURE 7. Une caténoïde

contrainte tout en minimisant sa surface «extérieure», et c'est ce principe qui lui donne sa sphérique. Il s'agit du problème de géométrie qu'on appelle le *problème isopérimétrique* : *quel corps de l'espace à trois dimensions, parmi tous ceux ayant un volume donné, a la plus petite surface extérieure ?* Il s'agit de la sphère ! Il existe de nombreuses démonstrations de cela, et aucune n'est vraiment facile. Mais c'est bien pour cette raison que la bulle est ronde et n'est pas cubique !

1.1. EXERCICE. Montrez qu'une bulle de savon ne peut pas être cubique ! Pour cela, déterminez quel rayon a une sphère dont le volume égale, disons, 1 centimètre cube (il faut disposer d'une formule donnant le volume d'une sphère en fonction de son rayon), et ensuite déterminez sa surface extérieure (il faut disposer d'une formule donnant la surface extérieure d'une sphère en fonction du rayon). Appelons A_s la surface extérieure de la sphère. Le calcul suivant consiste à déterminer l'aire extérieure A_c d'un cube de volume égal à 1 centimètre cube. Est-ce que $A_s < A_c$? Si oui, cela signifie bien que la bulle de savon a plutôt envie d'être sphérique que cubique. Tiens : pourquoi n'a-t-elle pas envie d'être tétraédrique ?

Nous venons d'évoquer deux principes physiques :

- (1) Les films de savon qui s'appuient sur un contour donné, le font en minimisant la surface qu'ils utilisent pour «boucher un trou» ;
- (2) Les bulles de savon minimisent la surface qui leur est nécessaire à «enfermer un volume d'air qui leur est imposé».

La géométrie des films et des bulles de savon consiste à se demander si ces deux principes physiques imposent aux films et aux bulles certaines formes, et en excluent d'autres. Par exemple, la solution du problème isopérimétrique dit que le principe (2) force une bulle isolée à prendre la forme d'une sphère ! Existe-t-il d'autres principes analogues ? Quelles formes peut-on observer ? C'est à ce genre d'expérience que s'est livré Joseph Plateau (né à Bruxelles en 1801 et mort à Gand en 1883). Ce sont ses conseils, rapportés par Ernest Lamarle,

qu'on a trouvés dans la note en bas de page au début de ce document. Lors d'une visite par là-bas², on ne manquera pas d'aller admirer les instruments de Joseph Plateau, dans son bureau laissé intact, à l'université de Gand. Il est également l'inventeur du *phénakistiscope* – vraisemblablement un autre mot d'origine grecque –, sorte de précurseur du cinéma, appelé «joujou scientifique» par Baudelaire : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Phénakistiscope>.

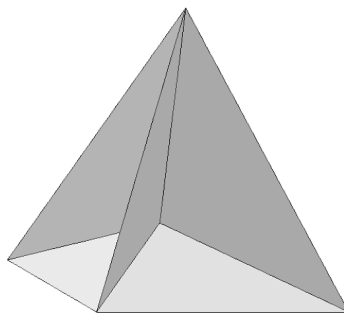


FIGURE 8. Film de savon formé sur un tétraèdre régulier

Revenons à nos bulles! Allons-y! Plongeons le tétraèdre dans l'eau savonneuse. En ôtant le tétraèdre du seau on observe un film de savon particulier, qui s'appuie sur les six arêtes, voir figure 8. Ce film est formé de six triangles identiques. Chacun de ces triangles a un côté qui coïncide avec l'une des arêtes du tétraèdre, et son sommet opposé est au centre du tétraèdre. Voici donc une configuration autorisée par le principe physique (1) ci-dessus. On note, dans cette configuration, deux types de *singularités*, c'est-à-dire deux façons qu'ont les triangles savonneux de «se croiser» :

- (1) Chaque triple de triangles savonneux, issus d'un sommet commun, «se croisent» le long d'un côté commun en des angles égaux de 120° ; appelons ces côtés, le long desquels les triangles «se croisent», des *courbes singulières* ;
- (2) Les six triangles «se croisent» au centre du tétraèdre, où les quatre courbes singulières elles-mêmes se rencontrent en des angles égaux.

1.2. EXERCICE. Quel est l'angle formé par ces courbes singulières ?

On peut à présent utiliser la paille (dont on aura pris soin de plonger préalablement le bout dans l'eau savonneuse) pour créer, au centre de la configuration savonneuse, une «bulle» dont on ajustera le volume à l'envi, tantôt y insufflant davantage d'air, tantôt en en retirant. L'ajout

2. On ira par exemple visiter la Venise du Nord avant de se rendre à la plage par un chemin de canaux, *Voyez la mer du Nord, elle s'est enfuie de Bruges*.

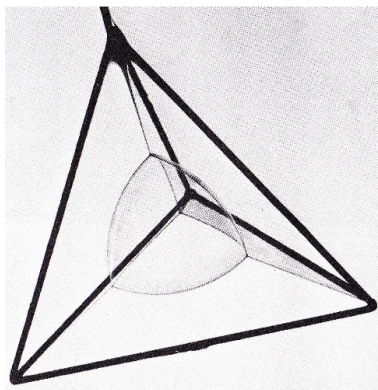


FIGURE 9. Film de savon formé sur un tétraèdre régulier, et sa bulle «tétraédrique»

de cette «bulle» (de forme non sphérique, car on la force à s'appuyer sur une configuration déjà présente) fait apparaître de nouvelles courbes singulières. En effet, la surface extérieure de la bulle elle-même est formée de quatre morceaux de sphère qui «se raccordent» aux six triangles déjà présents le long de telles courbes. En y regardant bien, on s'aperçoit que deux morceaux de sphères et un morceau de triangle (l'un des six triangles initiaux) «se croisent» le long d'une courbe singulière ... en des angles égaux de 120° : le dessin n'est donc pas neuf, il était déjà présent dans la configuration sans bulle. En outre, ces courbes singulières elles-mêmes se croisent par groupes de quatre ... en des angles égaux, ce qui n'est pas neuf non plus. C'est ce type d'observations que Plateau consignait dans un grand cahier.

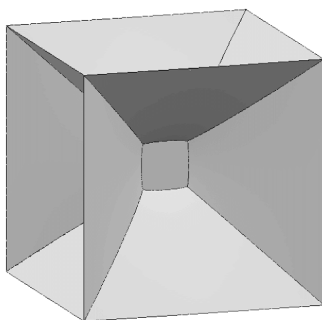


FIGURE 10. Film de savon s'appuyant sur les arêtes d'un cube

Tentons de créer de nouvelles formes de «singularités». Par exemple, si l'on plonge le cube dans l'eau savonneuse, on peut se demander s'il en ressortira une configuration formée de douze triangles, chacun d'entre eux ayant un côté égal à une des arêtes du cube et son côté opposé coïncidant avec le centre du cube. En faisant l'expérience, on note que

ce n'est pas cette forme que prennent les films de savon, voir figure 10 ! Au contraire, la configuration utilise seulement les deux singularités déjà observées jusqu'ici. Il en est de même si l'on ajoute une « bulle » au centre du cube.

2. LES OBSERVATIONS DE JOSEPH A.F. PLATEAU

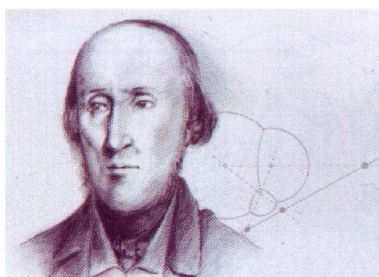


FIGURE 11. Joseph Antoine Ferdinand Plateau

Joseph Plateau a mené de nombreuses expériences, tenant de produire de nouvelles singularités, plongeant dans sa potion magique des contours dodécaédriques, icosaédriques, collant une bulle à l'autre, formant des amas de trois bulles, quatre, vingt bulles, sans arriver à falsifier cette simple règle : que les surfaces savonneuses ne « se croisent que deux façons possibles »,

- soit trois morceaux de surface se croisent le long d'une courbe singulière, à des angles égaux de 120° ;
- soit six morceaux de surface se croisent en un point, lui-même étant l'intersection de quatre courbes singulières qui s'y rencontrent en des angles égaux, chacune des quatre courbes singulières étant l'intersection de trois parmi les six morceaux de surface.

L'archétype de ces deux *singularités* est donc représenté dans le film qui se forme sur le contour tétraédrique. Une autre façon de dire les choses est la suivante : si l'on regarde un film de savon en l'un de ses points et que l'on zoome indéfiniment l'image au voisinage de ce point, on voit *in fine* l'un des trois dessins représentés à la figure 12.

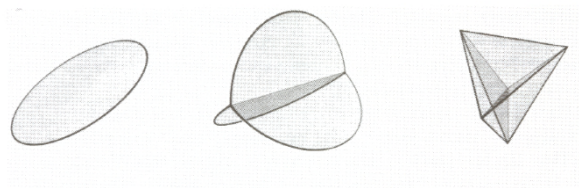


FIGURE 12. Les deux singularités observées par Plateau

L'un des succès de la «géométrie des bulles de savon»³ a été de *démontrer* que le principe d'optimisation auquel sont soumis les films et bulles de savon, impose que seules ces deux singularités observées par Plateau aient lieu. La démonstration est due à Jean Taylor, en 1976, [3], et repose sur des outils très complexes. Afin de se donner malgré tout l'occasion de démontrer ici un résultat qui n'est pas sans rapport avec le problème de Plateau, nous allons simplifier la question posée. Plutôt qu'un problème géométrique de minimisation de surface dans l'espace à trois dimensions, nous allons aborder un problème de minimisation de longueur dans l'espace à deux dimensions.

3. LE PROBLÈME DE STEINER

Cette section est inspirée du livre [1] dont il existe une traduction française, «Mathématiques et formes optimales».

Disons cette fois qu'on s'intéresse à trois villes qu'on souhaite relier entre elles par un réseau routier le plus court possible. Appelons A , B et C les trois villes – qu'on peut visualiser comme les trois sommets d'un triangle, par exemple. On peut imaginer tracer une première route de A à B , et une seconde route de B à C , de sorte que les trois villes soient reliées entre elles : pour aller de A à B ou de B à A on empruntera la première route ; pour aller de B à C ou de C à B on empruntera la seconde route ; tandis que pour aller de A à C on empruntera les deux routes, en passant par B . Ce réseau routier est en effet plus court que si on lui avait adjoint une troisième route reliant directement entre elles les villes A et C . Bien entendu, afin que chacune de ces deux routes soit la plus courte possible, on la choisit en «ligne droite». Y a-t-il moyen de faire mieux ? C'est-à-dire y a-t-il moyen de construire un réseau routier plus court, reliant entre elles ces trois villes ? Peut-être en utilisant un carrefour ?

Supposons un instant que les trois villes soient disposées de sorte que le triangle de sommets A , B et C n'ait pas d'angle intérieur trop grand (supérieur à 120° – on verra pourquoi plus tard). Appelons P un point intérieur du triangle, servant de carrefour, où se croisent trois routes, une issue de chacune des villes et allant en ligne droite au carrefour.

3.1. EXERCICE. Dans un triangle équilatéral, par exemple, trouvez une configuration de réseau routier, avec un carrefour P , qui a une longueur strictement inférieure à la configuration routière formée de deux côtés du triangle.

Nous allons déterminer une propriété géométrique du point P qui caractérise le réseau routier le plus court. On appelle ce problème d'optimisation le *problème de Steiner* et, le point P correspondant, s'appelle un *point de Fermat* du triangle. Le reste de cette section est consacré à la démonstration que le point P de Fermat occupe une position dans le triangle telle que les trois angles en P formés par les trois routes AP , BP et CP soient égaux (donc égaux à 120°). En vue d'établir

3. Ou *théorie de la mesure géométrique*

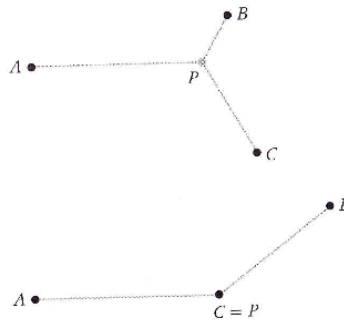


FIGURE 13. Le problème de Steiner

ce résultat, nous avons besoin d'idées, de dessins et de constructions intermédiaires.

Tout d'abord mettons-nous d'accord sur un point essentiel de géométrie euclidienne plane : entre deux points P et Q du plan, il existe un (et un seul) chemin le plus court ; il s'agit du segment de droite d'extrémités P et Q .

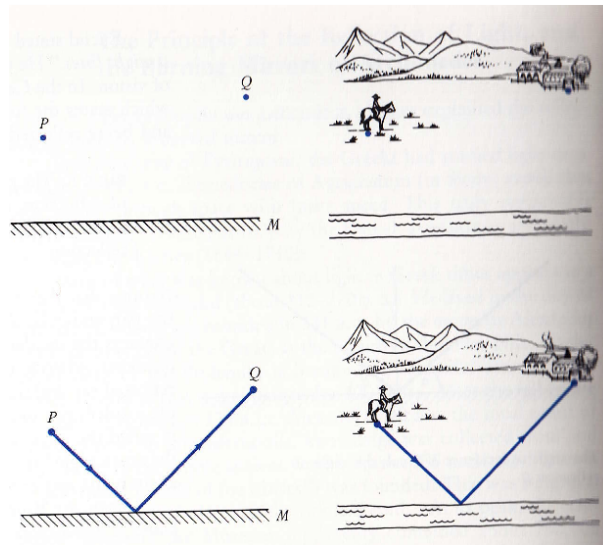


FIGURE 14. Le problème du cow-boy et son cheval

Ceci étant, posons un problème de distance minimale un peu plus élaboré. Disons qu'en P se trouvent un cow-boy et son cheval, qui souhaitent rentrer chez eux en Q , tout en passant par une rivière représentée par une droite M afin d'y faire boire le cheval. On suppose que P et Q se trouvent du même côté de M , et que le cow-boy et son cheval veulent faire au plus court. Il s'agit donc de déterminer un point R le long de la rivière, où le cheval boira, tel que la somme des distances

de P à R et de R à Q , soit la plus petite possible relativement au choix de R .

Il existe diverses manières d'aborder un tel problème. Par exemple, on peut munir le plan d'un système de coordonnées où les points seront repérés par une paire de nombres (latitude et longitude ou abscisse et ordonnée), le point R variable sera représenté par un seul nombre, et la somme des distances à minimiser sera représentée par une *fonction* explicite de ce nombre. On cherchera alors un minimum de cette fonction, par exemple à l'aide du *calcul différentiel*. Cependant, le problème que nous avons posé ici peut aussi être résolu en faisant un argument géométrique. Appelons P' le point du plan qui est le symétrique orthogonal

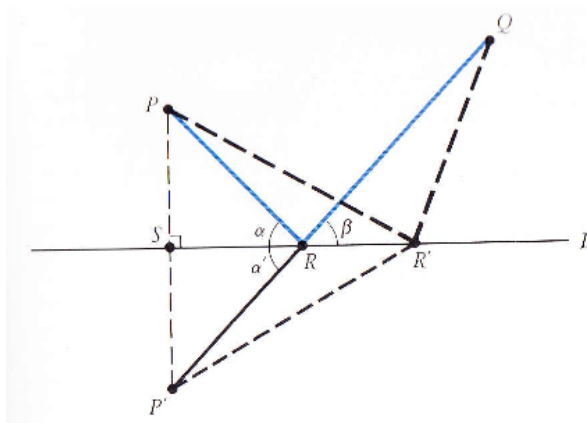


FIGURE 15. Théorème de Héron

de P par rapport à la droite M . Disons que R' est un point (variable, dont on cherche à trouver la position optimale) sur la droite M . Le triangle de sommets P , R' et P' est donc isocèle : les côtés PR' et $R'P'$ sont de même longueur. Par conséquent, la longueur qu'on cherche à minimiser, soit la somme des longueurs de PR' et de $R'Q$, égale la somme des longueurs de $P'R'$ et de $R'Q$. Or P' et Q se trouvent de part et d'autre de la droite M : on cherche donc un chemin joignant P' à Q , passant par un point R' de M , qui soit le plus court possible. Ce chemin est le segment de droite reliant P' à Q . Le point R recherché est donc à l'intersection de la droite M et de la droite contenant P' et Q .

On en déduit, comme illustré à la figure 15, que les angles d'incidence α et β sont égaux (car tous deux égaux à α'). On se réfère à cela comme au *Théorème de Héron*.

Parlons maintenant d'*ellipse*. On se rappelle qu'un cercle, centré en C , de rayon d , est le lieu des points R du plan qui sont situés à une distance de C égale à d . Une ellipse est définie de façon similaire. Au lieu de se donner un centre C , on se donne deux *foyers* P et Q , et on appelle *ellipse* le lieu des points R tels que la somme des distances de

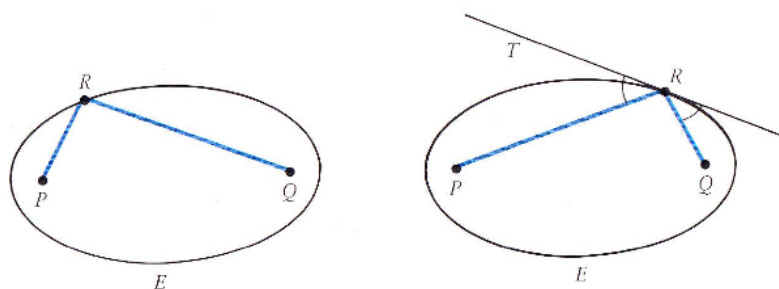


FIGURE 16. Angles d'incidence de rayons lumineux issus d'un foyer d'une ellipse

R à P et de R à Q égale d . On peut tracer un cercle et une ellipse à l'aide d'un lacet (de chaussure, représenté en bleu sur la figure : on l'attache en P et Q et on place la mine du crayon en R).

Si un point R' se trouve à l'extérieur de l'ellipse, alors la somme des distances de R' à P et de R' à Q est supérieure à d . De cela on tire la chose suivante : si R est un point de l'ellipse et que M désigne la tangente à l'ellipse au point R , alors l'angle formé par la droite M et la droite PR égale l'angle formé par la droite M et la droite QR (il s'agit à nouveau du Théorème de Héron), voir figure 16.

Nous sommes prêts, à présent, à déterminer la propriété géométrique du point de Fermat d'un triangle, *s'il existe*. On raisonne sur la figure 17. Supposons donc qu'un point P de Fermat existe dans le triangle de sommets A, B, C , c'est-à-dire que parmi tous les points P' du triangle, P est celui qui rend plus petite la somme des distances de A à P' , de B à P' , et de C à P' . Traçons un cercle centré au sommet C , sur lequel se trouve P , et traçons une ellipse de foyers A et B , sur laquelle se trouve P . La propriété optimale de P entraîne que l'ellipse et le cercle sont tangents en P ! (Pour s'en convaincre, on suggère au lecteur de faire un dessin du cas où le cercle et l'ellipse se croisent en deux points distincts, et de bouger P le long du cercle (ou de l'ellipse) afin d'obtenir une configuration meilleure.) Il s'ensuit que les angles \widehat{CPB} et \widehat{CPA} sont égaux, d'après le paragraphe précédent.

La même construction appliquée en centrant le cercle en A , et en choisissant les foyers de l'ellipse en B et C , entraîne que les angles \widehat{APB} et \widehat{APC} sont égaux. Il en résulte finalement que les trois angles en P coïncident, et sont donc égaux à 120° .

On trouvera ici http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point de nombreuses constructions géométriques, à la règle et au compas, permettant de construire le point de Fermat d'un triangle.

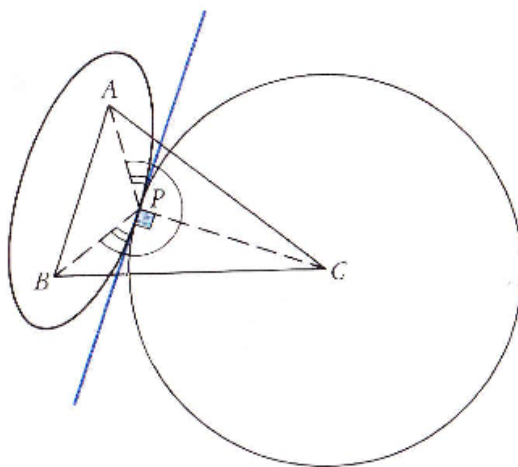


FIGURE 17. Point de Fermat du triangle

4. RUCHES D'ABEILLES

Tentons à présent quelques variations sur le thème de Steiner. Pour commencer, osons une analogie entre des problèmes de surfaces minimales dans l'espace à 3 dimensions, et des problèmes de réseaux routiers les plus courts dans l'espace à 2 dimensions. Plus précisément, nos expériences savonneuses nous ont amené à plonger dans le seau :

- (1) un tétraèdre : il en est ressorti le dessin de la figure 8 ;
- (2) un cube : il en est ressorti le dessin de la figure 10.

A la section précédente, nous avons considéré un problème de réseau routier le plus court reliant :

- (1) trois villes : on a obtenu un réseau optimal comme à la figure 13 ;
- (2) qu'en est-il si l'on considère à présent le problème analogue pour un réseau reliant entre elles quatre villes ?

Si les quatre villes sont situées au sommet d'un carré, on est tenté de suggérer que la réunion des deux diagonales du carré forme un réseau routier optimal. Ce n'est cependant pas le cas : si A , B , C et D désignent les villes en question, et P le centre du carré, on a ainsi inclus un triangle de sommets A , B et P dans notre réseau routier. En se référant au problème de Steiner pour les trois «villes» A , B et P (P , notre carrefour, est une ville virtuelle), on s'aperçoit qu'il est possible de créer un réseau routier plus court que la réunion des deux diagonales, en remplaçant les routes reliant A et P , et reliant B et P , par le réseau de Steiner relatif à ce triangle ! C'est possible car les angles aux sommets de ce triangle A , B , P , sont tous inférieurs à 120° . Si l'on pousse ce raisonnement plus avant, il est possible d'établir qu'une

solution du problème de Steiner pour les quatre villes situées aux sommets d'un carré est le réseau illustré à la figure 18. Le lecteur aura

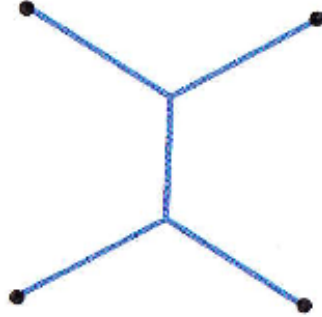


FIGURE 18. Problème de Steiner pour quatre villes

découvert l'analogie formelle entre ce problème, et le problème de films de savon s'appuyant sur les arêtes d'un cube! En fait, il est possible de démontrer qu'un réseau routier optimal relatif à un nombre quelconque de villes, par exemple dix mille, n'utilise que des routes en ligne droite, et qui ne peuvent se croiser (hors des villes) que par trois en des angles égaux de 120° . C'est en quelque sorte une version en 2 dimensions des règles de Plateau énoncées à la section précédente, et qui elles s'appliquent à un amas d'un nombre quelconque de bulles, par exemple dix mille! A cet égard, on laissera s'égarer nos pensées à la figure ??, ou la prochaine fois qu'on est de corvée vaisselle.



FIGURE 19. Un amas de bulles, ou la poésie de l'eau de vaisselle

Enfin, pour clore ce tour d'horizon de géométrie des bulles, imaginons ce qu'est l'analogue d'un amas de bulles en 2 dimensions. Qu'est-ce que le problème isopérimétrique dans le plan? Il s'agit d'enfermer une «aire» donnée (au lieu d'un volume donné) en minimisant le périmètre de la figure en question (au lieu de minimiser la surface extérieure du

corps en question). La solution de ce problème est le cercle, auquel on peut en quelque sorte penser comme à une bulle en 2 dimensions... Que se passe-t-il si l'on amasse des telles bulles de dimension 2? En se rappelant la seule singularité autorisée par le problème de Steiner, et le titre de la section, on est forcé de penser à la figure ??, et d'exercer ses talents de *googleur*.

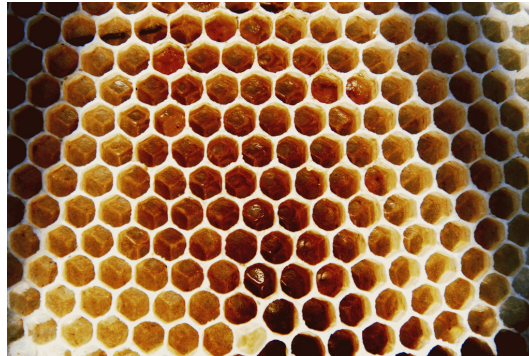


FIGURE 20. Habitat des abeilles, sorte d'eau de vaisselle de dimension 2

RÉFÉRENCES

1. Stefan Hildebrandt and Anthony Tromba, *Mathematics and optimal form*, Scientific American Library, New York, 1985.
2. E. Lamarle, *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces*, Mém. Acad. Roy. Belg. **XXXV** (1864).
3. J.E. Taylor, *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), 489–539.

E-mail address: `depauw@math.univ-paris-diderot.fr`