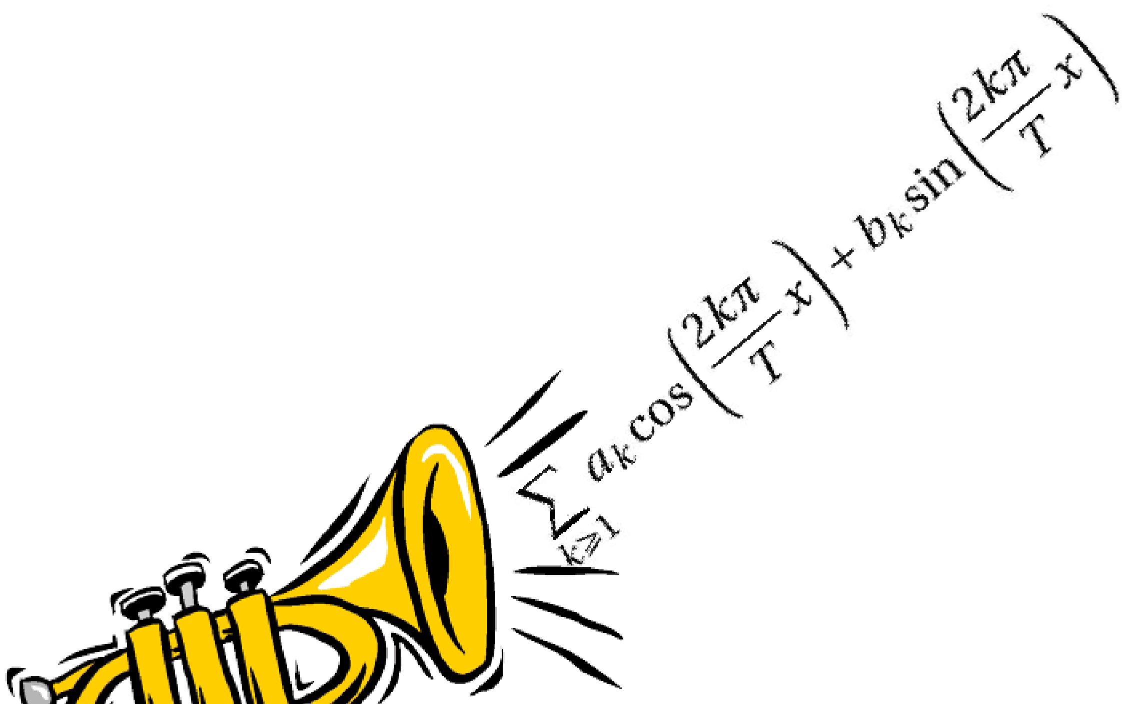
UNIVERSITE D'ORLEANS

CENTRE GALOIS
CENTRE RÉGIONAL DÉDIÉ À LA POPULARISATION DES MATHÉMATIQUES

La Modélisation du son

Présenté par :

Frédéric RACINE



Juin 2013

Remerciements

Je souhaite profiter de ces premières lignes pour remercier les différentes personnes qui m'ont apporté leur aide et leur soutien dans l'élaboration de ce travail.
Tout d'abord, je remercie Eric DECREUX, mon responsable de mémoire, pour sa disponibilité, ses précieux conseils et explications sans lesquels la rédaction de ce travail n'aurait pas été possible. Je remercie également Philippe GRILLOT, Président du Centre Galois, pour m'avoir accordé sa confiance afin de mener ce projet et Jean-Philippe Anker, responsable du master MA, pour m'avoir encouragé à faire ce travail.
Je remercie de nouveau ces trois personnes pour avoir accepté de composer mon jury lors de mes deux présentations.
Enfin, je remercie les futurs lecteurs de ce travail.

Introduction

Les mathématiques sont considérées et se revendiquent elles-même comme étant abstraites. Il est intéressant de remarquer que cela n'empêche pas les mathématiciens de s'intéresser également à d'autres domaines de connaissance, dont la musique. Il serait faux de croire que cela ne s'applique qu'aux mathématiciens contemporains.
En effet, à l'époque de la Grèce antique, Pythagore a été l'un des premiers à chercher des liens entre mathématiques et musique. Bien que sa théorie semble difficile à défendre aujourd'hui, elle eût le mérite d'exciter la curiosité des mathématiciens et musiciens des époques suivantes. Au début du XVIIIe siècle notamment, Sauveur établit les bases de ce qu'il appela *l'acoustique*. L'outil mathématique, en permettant de faire ce qu'on appelle une modélisation du phénomène, a par la suite conforté la vision développée par ce savant. La première partie de ce mémoire présente ce qu'est le son au sens des sciences physiques modernes et comment il est modélisé mathématiquement. La deuxième partie explique comment la théorie mathématique de Fourier a permis de formaliser les idées de Sauveur. Enfin, via différents travaux d'Helmholtz, la troisième partie montre que le modèle permet d'expliquer certains phénomènes sonores et donne des pistes pour la compréhension du fonctionnement de l'oreille.

Table des matières

1 Son, ondes et phénomènes périodiques

1.1 Son et ondes

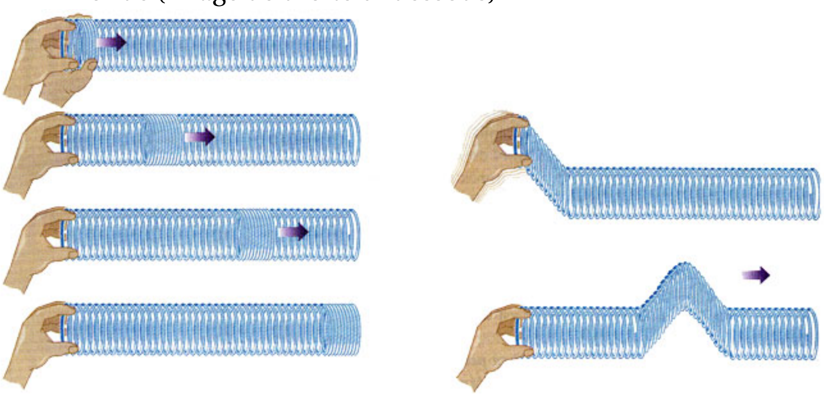
Définition 1.1.1. Un *son* correspond à une *onde* produite par la *vibration mécanique d'un support* qui se propage dans un milieu (le plus souvent l'air).

1.1.1 Les ondes

Définition 1.1.2. Une *onde* consiste en le déplacement d'une déformation locale du milieu physique sans déplacement global de la matière.

Exemple 1.1.1. Une pierre qu'on lance dans une flaque d'eau provoque une onde que l'on peut voir se propager.

On peut différencier deux types d'ondes :
- Les *ondes longitudinales* dont la déformation a lieu dans la même direction que le déplacement de l'onde (image de gauche ci-dessous)
- Les *ondes transversales* dont la déformation a lieu dans la direction orthogonale au déplacement de l'onde (image de droite ci-dessous)



Remarque 1.1.1. *Le son est en fait une onde longitudinale, l'air ayant la capacité de se déformer grâce à son élasticité (de la même manière que le ressort sur l'image à gauche) mais sans que cette déformation soit visible.*

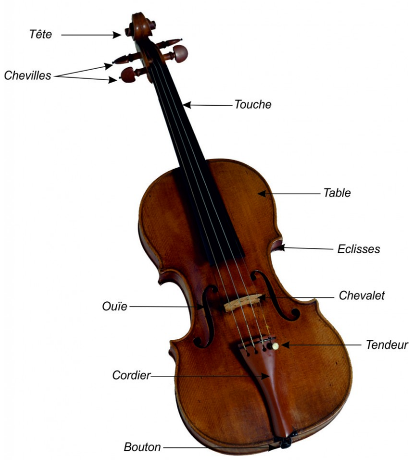
1.1.2 Vibration et fonctionnement des instruments de musique

Définition 1.1.3. Une *vibration* est un mouvement d'oscillation autour d'une position d'équilibre.

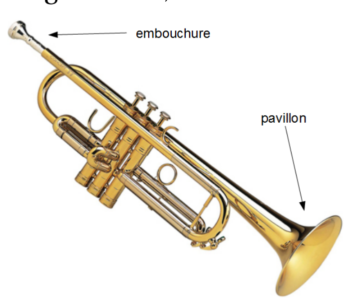
Une bonne manière de comprendre comment se forme un son est de considérer celui produit par la vibration d'une membrane. En effet, en oscillant celle-ci crée successivement une surpression et une dépression de l'air permettant la formation d'une onde sonore se propageant dans la direction orthogonale à la membrane de la même manière qu'une onde longitudinale dans un ressort horizontal. En fait, la *vibration mécanique d'un support* est la base du fonctionnement de tout instrument de musique. C'est, à l'image de la membrane, la peau tendue (pour le tambour, les timbales...) qui vibre pour produire un son. Ce sont les cordes (pour le violon, la guitare, le piano...) ou encore les lèvres de l'instrumentiste (pour la trompette, le trombone, le cor...), qui jouent également un rôle vibratoire à l'origine du son de ces instruments. Cependant, cette vibration seule n'est pas suffisante pour caractériser le son (son timbre en particulier, cf point 4 du paragraphe 1.1.3) d'une part, et même pour permettre qu'il soit audible d'autre part. La manière d'obtenir une vibration et la manière dont cette vibration est transformée sont également déterminantes. En effet, la vibration crée en général ce que l'on appelle une *onde stationnaire* qui n'a pas la capacité de se propager à une distance suffisante de son émetteur pour qu'elle soit perceptible par un récepteur. C'est pour cela qu'au delà du système excitateur, la structure de l'instrument permet de produire une *onde progressive*, capable de se propager dans l'air de manière significative. Selon la forme ou le matériau de l'instrument, le son a des caractéristiques différentes (cf remarque 1.1.4).

le tambour : La peau tendue entre en vibration lorsqu'elle est percutée par les baguettes et agit exactement comme la membrane. Le fût sert de caisse de résonance.

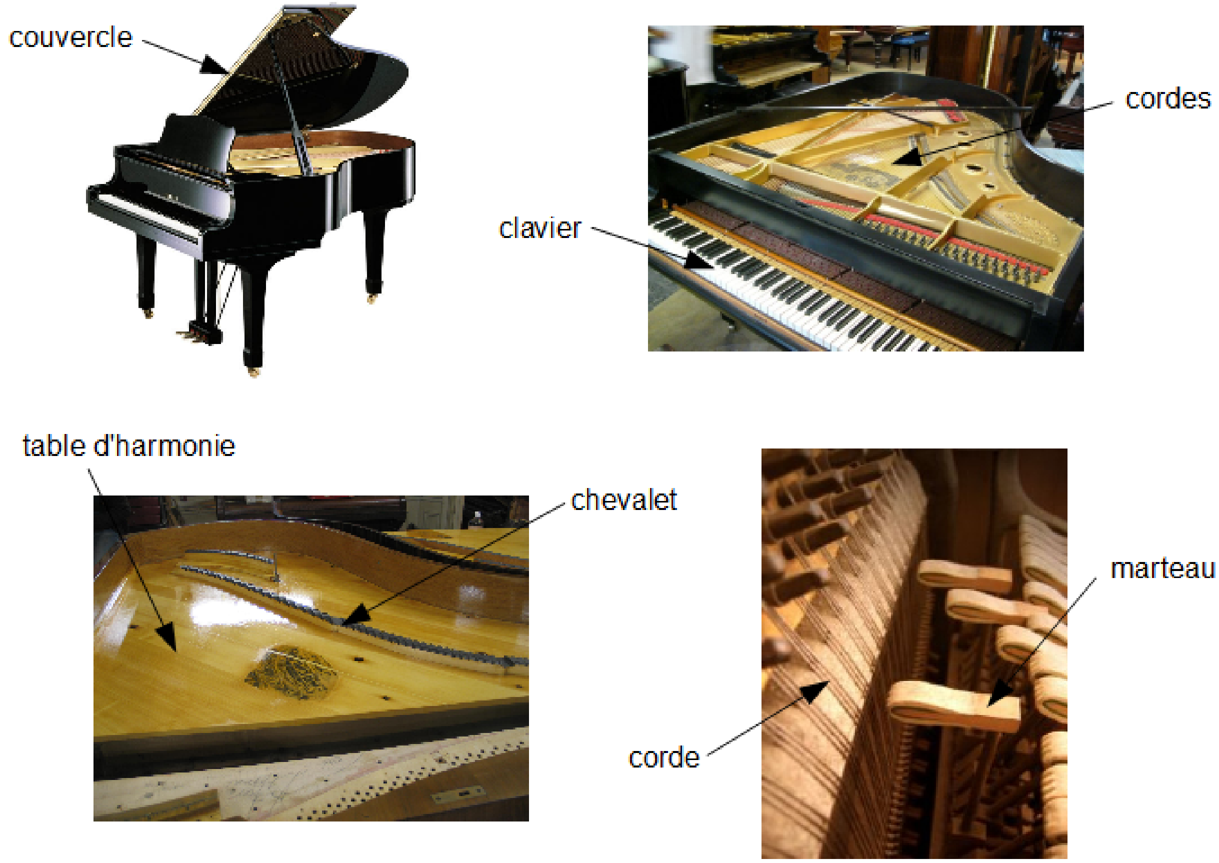
Le violon : La corde est mise en vibration par le frottement de l'archet. L'amplificateur est la caisse de résonance formée notamment de la table d'harmonie et du fond permettant de produire une onde progressive sortant par les ouïes. On peut noter que la vibration des cordes est transmise à la table d'harmonie par le chevalet et au fond par une pièce de bois appelée l'âme de l'instrument.



La trompette : Les lèvres du trompettiste sont mises en vibration par son souffle. Le tube et le pavillon permettent de transformer cette vibration en onde progressive. Le pavillon, plus particulièrement, permet de diriger l'onde, et ainsi de rendre le son plus fort lorsqu'on est de face.



le piano : Lorsque l'on appuie sur une touche, le mécanisme actionne un marteau venant frapper sur une corde et la mettant ainsi en vibration. Comme pour le violon, cette vibration est transmise à la table d'harmonie par un chevalet. La caisse de résonance du piano est, elle, modulable selon l'ouverture plus ou moins grande du couvercle, ce qui conditionne l'intensité, le type de résonance et la direction du son. On peut par exemple remarquer que le son sera perçu plus fort si le couvercle est juste relevé et moins fort si le couvercle est complètement abaissé ou retiré.



Fonctionnement d'un piano à queue

1.1.3 Caractéristiques du son

Définition 1.1.4. On associe généralement à un son 4 caractéristiques qui sont :

1. la durée
2. l'intensité
3. la hauteur
4. le timbre

Remarque 1.1.2. *Avant de définir ces différents termes, nous devons remarquer que le point de vue du musicien n'est pas celui du scientifique. Le musicien a notamment tendance à définir ces termes de manière relative en comparant les caractéristiques d'un son avec celles d'un autre qui le suit ou le précède dans une oeuvre musicale. Le scientifique cherche quant à lui à étudier un son indépendamment d'un contexte émotionnel ou subjectif, et ainsi attribue plutôt à ces caractéristiques des mesures absolues. Dans la pratique, un auditeur entend les sons plutôt de manière relative ; différents exemples seront développés par la suite pour expliquer cela. Le fonctionnement de l'oreille en est en grande partie responsable (cf paragraphe 3.3.2). Cependant, d'un point de vue des sciences physiques, il est naturel de vouloir mesurer les caractéristiques du son de manière absolue.*

1. **La durée**
   Comme son nom l'indique, la *durée* correspond au temps que dure un son. Elle est généralement mesurée en secondes d'un point de vue scientifique.
   En musique, sur une partition, elle est indiquée par les rythmes et est fonction du tempo. L'écriture des rythmes est en fait un moyen de donner la durée relative des notes les unes par rapport aux autres.

   Remarque 1.1.3. *Il est difficile d'attribuer une durée à certains sons, le claquement dans les mains par exemple. Pour d'autres, on ne sait pas si la durée que l'on doit leur attribuer est la durée d'émission (le temps de vibration) ou la durée durant laquelle on perçoit le son (par exemple le son d'une trompette dans une église).*

2. **L'intensité**
   L'*intensité* perçue correspond au fait qu'un son est fort ou faible. Elle est mesurée en décibels.
   En musique, sur une partition, on l'indique par les nuances : f, p, $cresc$ signifient fort, doux et de plus en plus fort par exemple. Là encore, c'est une indication relative à l'intensité de certains sons par rapport à d'autres.

   Remarque 1.1.4. *L'intensité est en pratique une grande question de ressenti personnel et dépend grandement de la situation acoustique ambiante. Par exemple, on entend le "tic-tac" de l'horloge la nuit avant de s'endormir alors qu'on ne l'entend pas dans la journée. Le fait de pouvoir prévoir un bruit consciemment ou inconsciemment joue également un grand rôle dans l'intensité perçue de celui-ci (cf paragraphe 3.3.2)*

3. **La hauteur**
   La *hauteur* d'un son correspond au fait qu'il soit aigu, médium ou grave. Encore une fois, c'est bien souvent une indication relative permettant de comparer deux sons. Cependant, nous verrons plus tard que nous avons une manière absolue de déterminer la hauteur d'un son, d'un point de vue des sciences physiques.
   Les musiciens utilisent eux une échelle avec des notes mais qui est loin de définir toutes les hauteurs possibles. Sur une partition, la hauteur du son joué est indiquée par la hauteur de la note écrite sur la portée musicale. Plus la note est haute sur la portée plus elle est aigüe.

   Remarque 1.1.5. *Certains sons n'ont pas de hauteur, le tambour par exemple. D'autres sons semblent avoir une hauteur mais celle-ci est multiple comme dans le cas du son d'une cloche. On peut noter également que les musiciens considèrent quand même la hauteur de la note comme absolue par convention. En effet, en 1953, la Conférence internationale de Londres a par exemple décidé de fixer une hauteur universelle pour la note* la.

4. **Le timbre**
   Le *timbre* est plus difficile à définir. On peut dire que c'est l'ensemble des caractéristiques qui permet d'identifier un instrument de musique ou de reconnaître une voix. On peut le qualifier à l'aide d'adjectifs comme rauque, nasillard, clair, cuivré...
   En musique, sur une partition, selon les instruments on peut indiquer des changements de timbre comme pour la trompette où il est parfois demandé de jouer avec certaines sourdines.

Conclusion 1. Malgré le fait que du point de vue d'un musicien les caractéristiques du son sont traitées de manière relative, les sciences permettent de les étudier indépendamment d'un contexte musical de manière absolue. Pour cela la durée du son étudié est assez arbitraire. On peut par exemple considérer un son d'une durée de l'ordre de la seconde, et on peut le qualifier de *musical* s'il a une hauteur. En effet, s'il n'en a pas, hors contexte d'une oeuvre musicale, on a plutôt tendance à l'assimiler à un bruit.

Définition 1.1.5. Dans toute la suite, on appellera *son musical* un son auquel on peut associer une hauteur fixe.

Exemple 1.1.2.
- La plupart des instruments produisent des sons musicaux.
- Les différents éléments de la batterie ne produisent pas de sons musicaux selon notre convention.

1.2 Modélisation mathématique

1.2.1 Notion de fonction périodique

Remarque 1.2.1. *On remarque dans une première approche qu'une onde associée à un son musical est périodique, c'est-à-dire que la déformation se reproduit identique à elle-même à intervalle de temps régulier. Dans le cas d'une onde sonore, cette déformation est en fait une variation locale de la pression de l'air. On peut représenter cette variation par une fonction mathématique, qui en se plaçant en un point de l'espace fixe, associe à un instant* t *la valeur de la pression au point fixé à cet instant. Cette fonction permet donc de représenter l'onde associée à un son musical. Ceci correspond à la situation d'une personne qui reste au même endroit pour écouter quelque chose.*

Définition 1.2.1. La courbe associée à cette fonction est appelée un oscillogramme.

Définition 1.2.2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est périodique si il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$

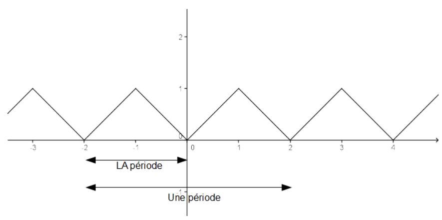


FIGURE 1 – Exemple de la courbe d'une fonction périodique

Définition 1.2.3. T est appelée une période de f.

Exemple 1.2.1. Sur la figure 1, 2 est une période de la fonction représentée.

Notation 1. Si T est une période de f, on dit que f est T-périodique.

Proposition-Définition 1.2.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nT est aussi une période de f. Une fonction périodique admet donc une infinité de périodes. Parmi celles-ci, on appelle LA période de f la plus petite des périodes, si une telle période existe.*

Exemple 1.2.2. Pour la fonction représentée sur la figure 1, 4 est une période et 2 est LA période de la fonction.

Démonstration.
Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction T-périodique.
Montrons par récurrence que f est nT-périodique.

- Initialisation
  La propriété est vraie pour $n = 1$ car f est T-périodique.

- Hérédité
  Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f soit nT-périodique. Montrons que f est alors $(n+1)T$-périodique.
  On a par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(x+nT) \\ & = & f((x+nT)+T) \text{ (car } f \text{ est } T\text{-périodique)} \\ & = & f(x+(n+1)T) \end{array}$$

  Donc f est $(n+1)T$-périodique.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est nT-périodique. □

Remarque 1.2.2. *D'après la remarque 1.2.1, il est naturel de représenter l'onde associée à un son musical par une fonction périodique. Les fonctions étudiées sont continues, la variation locale de la pression de l'air ne faisant pas de saut. Ainsi si la condition de la Proposition-Définition 1.2.1 n'est pas satisfaite, on peut montrer que la fonction est alors constante. Dans ce cas, la fonction étudiée ne peut pas correspondre à un son. On peut donc toujours trouver LA période de la fonction représentant un son.*

Proposition 1.2.1.

1. *Si f et g sont deux fonctions T-périodique alors $f+g$ est T-périodique.*
2. *Si f est T-périodique, alors pour tout $A \in \mathbb{R}^*$ et $B \in \mathbb{R}$, $Af+B$ est T-périodique.*

Démonstration.

1. Soient $T>0$ et f et g deux fonctions T-périodiques. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(x+T) & = & f(x+T)+g(x+T) \\ & = & f(x)+g(x) \text{ (car } f \text{ et } g \text{ sont } T\text{-périodiques)} \\ & = & (f+g)(x) \end{array}$$

Donc $f+g$ est T-périodique.

2. Soient $T>0$, f une fonction T-périodiques, $A \in \mathbb{R}^*$ et $B \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} (Af+B)(x+T) & = & Af(x+T)+B \\ & = & Af(x)+B \text{ (car } f \text{ est } T\text{-périodique)} \\ & = & (Af+B)(x) \end{array}$$

Donc $Af+B$ est T-périodique.

□

Remarque 1.2.3. *Par une récurrence évidente, on peut même montrer que la somme de n fonctions T-périodiques est T-périodique.*

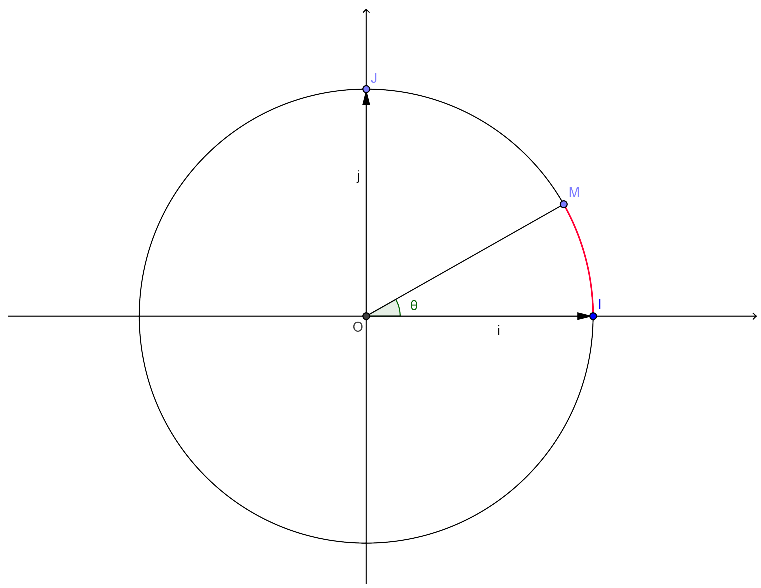
1.2.2 Un phénomène périodique en mathématiques

Nous avons défini, dans le paragraphe précédent, la notion de *fonction périodique*. Cette notion est cependant assez abstraite et nous allons chercher des exemples de fonctions périodiques. Le phénomène périodique qui peut paraître le plus naturel de considérer est sûrement le fait de tourner en rond. En effet, si l'on considère que l'on se déplace toujours à la même vitesse, et que l'on met x secondes à revenir à sa position initiale, toutes les x secondes, nous serons au même endroit. Mathématiquement, cela revient à considérer le déplacement d'un point sur un cercle. Pour plus de commodité, posons les définitions suivantes :

Définition 1.2.4. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle *cercle trigonométrique* le cercle de rayon 1 centré en O. On oriente ce cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (appelé le sens direct).

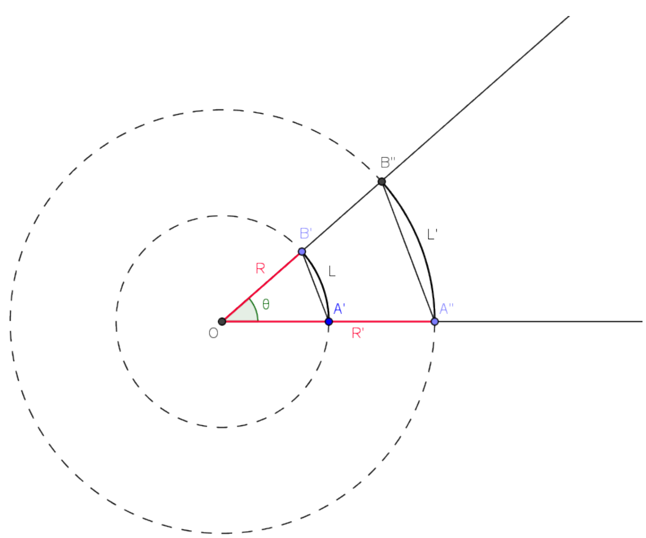
Définition 1.2.5. Soit M un point du cercle trigonométrique.
La mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ est notée θ et est égale à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ si l'angle est direct et à l'opposé de cette longueur si l'angle est indirect.

Le choix de ce mode de mesure répond à une certaine logique : mesurer un angle, c'est mesurer le degré d'ouverture du secteur angulaire qui lui correspond. Il est donc naturel de choisir une longueur d'arc de cercle. Toutefois, il est évident que cette longueur dépend du rayon du cercle choisi, on prend alors le rayon 1 par convention. Les remarques qui suivent ont pour objectif d'observer plus précisément la portée de ce choix.



Remarque 1.2.4. *Considérons deux demi-droites* $[OA)$ *et* $[OB)$ *et un cercle* $\mathscr{C}$ *de rayon* R *centré en* O*. Ces 2 demi-droites interceptent un arc de ce cercle. Notons-le* $\widehat{A'B'}$ *et* L *sa longueur. La mesure en radian de l'angle* $\widehat{AOB}$ *est alors* $\pm\frac{L}{R}$ *selon l'orientation. Cela signifie en particulier que le rapport* $\frac{L}{R}$ *a la même valeur quelque soit* R.

Démonstration.
La démonstration s'appuie sur une généralisation du théorème de Thalès aux arcs de cercle.
Soit $\mathscr{C}'$ un cercle de rayon $R' \neq R$ centré en O. (OA) et (OB) interceptent alors l'arc $\widehat{A''B''}$ de longueur L' de ce cercle.



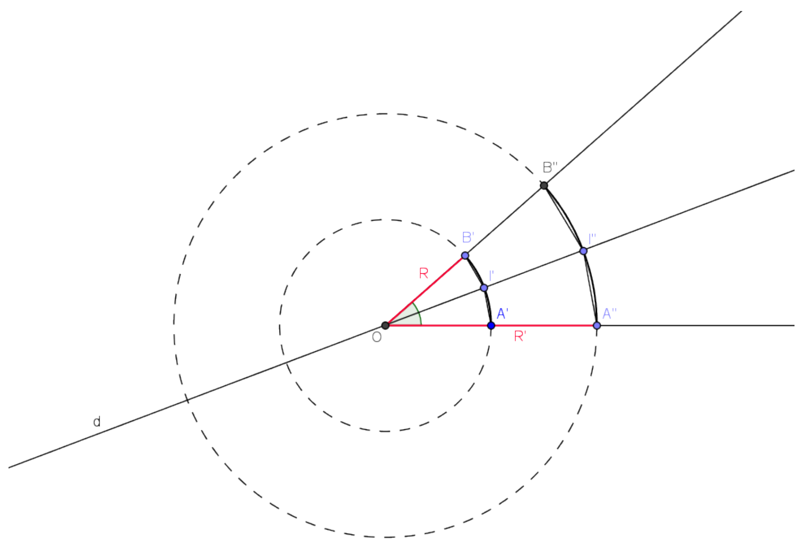
Le calcul de la longueur d'une courbe étant compliqué, on approche cette courbe par des segments de droites et on peut ainsi appliquer le théorème de Thalès à chaque segment.
L'approximation la plus grossière consiste à approcher les arcs de cercle $\widehat{A'B'}$ et $\widehat{A''B''}$ respectivement par les cordes $[A'B']$ et $[A''B'']$. On est alors dans la situation du théorème de Thalès. Les rapports $\frac{OA'}{OA''}$ et $\frac{OB'}{OB''}$ valent tous deux $\frac{R}{R'}$. Ils sont donc égaux et d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites $(A'B')$ et $(A''B'')$ sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a donc l' égalité suivante :

$$\frac{R'}{R} = \frac{A''B''}{A'B'}$$

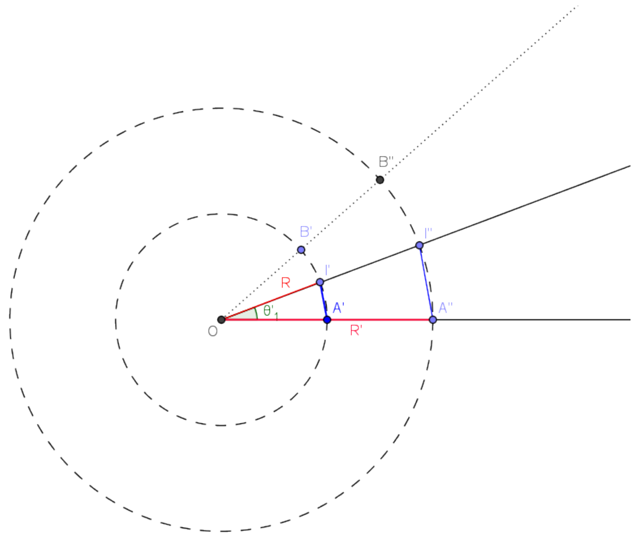
ce qui donne :

$$\frac{A'B'}{R} = \frac{A''B''}{R'}$$

Si on assimilait la longueur de chacune des cordes à celle des arcs de cercle associés, cette égalité prouverait que la mesure en radian d'un angle ne dépend pas du rayon du cercle choisi. Cependant l'approximation est quand même assez grossière et on va donc approcher la longueur de chaque arc de manière plus précise. Pour ce faire, on considère la bissectrice (d) de θ, I' l'intersection de (d) avec l'arc $\widehat{A'B'}$ et I'' l'intersection de (d) avec l'arc $\widehat{A''B''}$.
La longueur L de l'arc de cercle $\widehat{A'B'}$ est approchée par $A'I' + I'B'$ et de même, la longueur L' de l'arc de cercle $\widehat{A''B''}$ est approchée par $A''I'' + I''B''$. On est alors dans la situation du théorème de Thalès des deux côtés de la bissectrice :



- Les rapports $\frac{OA'}{OA''}$ et $\frac{OI'}{OI''}$ valent tous deux $\frac{R}{R'}$. Ils sont donc égaux et d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites $(A'I')$ et $(A''I'')$ sont parallèles.



D'après le théorème de Thalès, on a donc l' égalité suivante :

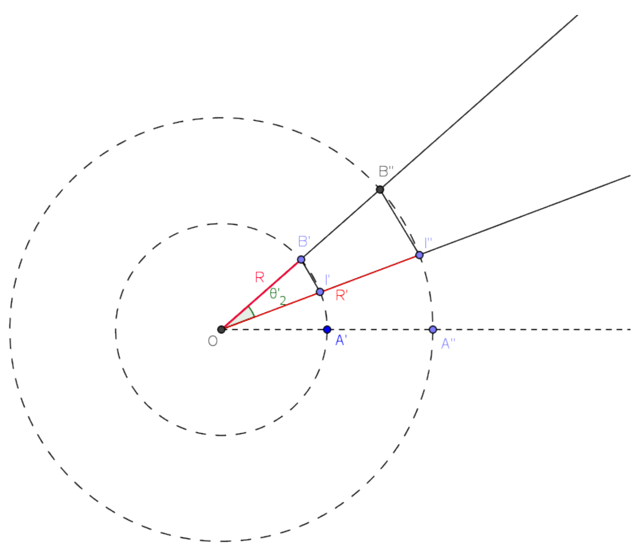
$$\frac{R'}{R} = \frac{A''I''}{A'I'}$$

ce qui donne :

$$\frac{A'I'}{R} = \frac{A''I''}{R'} \tag{1.1}$$

– En appliquant le même raisonnement à la figure ci-dessous, on obtient :

$$\frac{I'B'}{R} = \frac{I''B''}{R'} \tag{1.2}$$

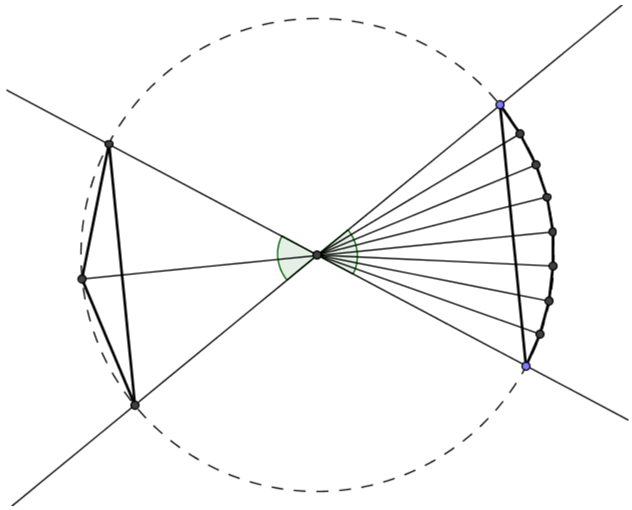


En sommant terme à terme les équations 1.1 et 1.2, on obtient :

$$\frac{A'I' + I'B'}{R} = \frac{A''I'' + I''B''}{R'}$$

Si on assimilait la somme des longueurs des deux cordes à celle de chaque arc de cercle, cette égalité prouverait bien que la mesure en radian d'un angle ne dépend pas du rayon du cercle choisi.

Cette manière d'approcher la longueur de l'arc de cercle par deux segments de droite peut se répéter une infinité de fois pour être toujours plus précis.



On peut à chaque fois répéter le raisonnement ci-dessus et appliquer le théorème de Thalès. Il est clair que la somme des longueurs des cordes approchant l'arc de cercle tend vers la longueur de l'arc de cercle lorsque le nombre de cordes tend vers l'infini (cf figure ci-dessus). Cela permet de justifier le fait que le théorème de Thalès se généralise aux longueurs d'arcs de cercle et on obtient ainsi que :

$$\frac{R'}{R} = \frac{L'}{L}$$

ce qui donne :

$$\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$$

Cette égalité prouve que le rapport $\frac{L}{R}$ ne dépend pas du rayon du cercle choisi. Ainsi, on peut prendre si l'on veut un cercle de rayon 1 et la mesure en radian de l'angle est tout simplement la longueur de l'arc de cercle intercepté, d'où la définition donnée à partir du cercle trigonométrique. □

Remarque 1.2.5. *En fait, lorsque l'on se ramène à un cercle de rayon 1 à partir d'un cercle de rayon R quelconque on réalise une transformation géométrique appelée "homothétie". Cette transformation a pour propriétés de multiplier chaque longueur par un même nombre (soit les agrandissant, soit les réduisant) mais de conserver la les proportions, c'est-à-dire, d'un point de vue de la perception visuelle, la forme des figures. Ainsi, par exemple si l'on peut passer d'un triangle à un autre en réalisant une homothétie, on dit que ces triangles sont semblables. Ici, les triangles $OA'B'$ et $OA''B''$ sont semblables. C'est pour cela que l'on peut appliquer le théorème de Thalès.*

Remarque 1.2.6. *En fait, un angle a une infinité de mesures en radians. En effet, on peut très bien considérer que la longueur de l'arc de cercle est en fait (la longueur du cercle) + (celle de l'arc de cercle) ou encore (2 fois celle du cercle) + (celle de l'arc de cercle) etc... On appelle mesure principale de l'angle celle comprise entre $-\pi$ et π.*

Exemple 1.2.3. Quelques correspondances entre angles mesurés en degré et en radian :

- 2π rad= 360°
- π rad= 180°
- $\frac{\pi}{2}$ rad=90°
- $\frac{\pi}{3}$ rad=60°
- $\frac{\pi}{4}$ rad=45°
- $\frac{\pi}{6}$ rad=30°

Remarque 1.2.7. *La principale différence entre la mesure en radian et la mesure en degré tient au fait que les angles mesurés en radian sont des angles orientés alors que les angles mesurés en degré sont des angles non-orientés. Ainsi, par exemple un angle droit (de 90°) peut aussi bien valoir $\frac{\pi}{2}$ rad ou $-\frac{\pi}{2}$ rad.*

2 Théorie de Fourier

2.1 Les fonctions périodiques de base

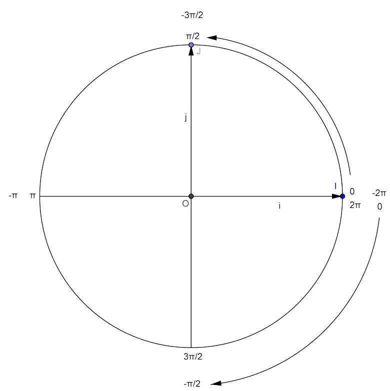
2.1.1 Définitions et Propriétés

Définition 2.1.1.

- La fonction cosinus notée *cos* est la fonction qui à tout angle θ exprimé en radian associe l'abscisse du point M correspondant sur le cercle trigonométrique.
- La fonction sinus notée *sin* est la fonction qui à tout angle θ exprimé en radian associe l'ordonnée du point M correspondant sur le cercle trigonométrique.

Sur la figure du cercle trigonométrique en bas de la page, on a $X = \cos(\theta)$ et $Y = \sin(\theta)$.

Remarque 2.1.1. *L'intérêt de cette définition est de définir le* cosinus *et le* sinus *d'angles ayant une mesure valant n'importe quel réel quitte à parcourir un nombre de fois suffisant le cercle. Ainsi,* cos *et* sin *sont des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

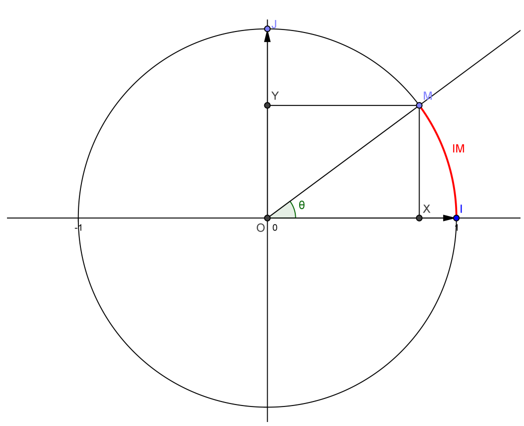


Exemple 2.1.1. On peut voir sur la figure ci-dessus que :

- $\cos(0) = \cos(2\pi) = \cos(-2\pi) = 1$ et $\sin(0) = \sin(2\pi) = \sin(-2\pi) = 0$
- $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(-\frac{3\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{3\pi}{2}) = 1$
- $\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = \sin(-\pi) = 0$
- $\cos(\frac{3\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{3\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

Remarque 2.1.2. *Ces définitions coïncident avec celles vues dans un triangle rectangle pour des angles aigus. Elles ont pour avantage de généraliser la notion à n'importe quel angle.*

Démonstration.
Considérons un point $M(x, y)$ du quart de cercle trigonométrique en haut à droite, appelé premier quadrant. Appelons X son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et Y son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées. Soit θ l'angle $\widehat{XOM}$.



OXM est un triangle rectangle en X. On sait alors que :

$$\cos(\theta) = \frac{OX}{OM}$$

c'est-à-dire

$$\cos(\theta) = \frac{x}{1} = x$$

On retrouve l'abscisse du point M comme dans la nouvelle définition.
De même, on sait que :

$$\sin(\theta) = \frac{XM}{OM} = \frac{OY}{1} = y$$

On retrouve également l'ordonnée du point M comme dans la nouvelle définition. □

Proposition 2.1.1. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$,

1. $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$
2. $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

Démonstration.

1. Le cercle trigonométrique est le cercle centré en 0 de rayon 1. La valeur absolue de l'abscisse et de l'ordonnée de chacun de ses points est donc inférieure ou égale à 1, ce qui démontre la propriété.
2. Si on reprend les notations de la démonstration de la remarque 2.1.2, le triangle OXM est rectangle en X et on peut donc appliquer le théorème de Pythagore, ce qui donne :

$$\begin{aligned} OM^2 &= OX^2 + XM^2 \\ 1^2 &= OX^2 + OY^2 \\ 1 &= x^2 + y^2 \\ 1 &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

□

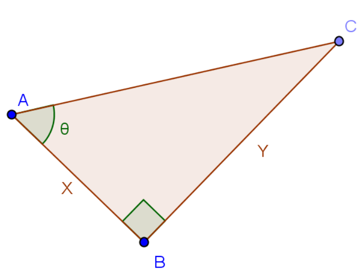
Proposition 2.1.2. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, *si* $x^2 + y^2 = 1$ *alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\cos(\theta) = x$ *et* $\sin(\theta) = y$

Démonstration.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$x^2 + y^2 = 1$$

On peut construire un triangle ABC tel que

$$AB = x,\ BC = y \text{ et } AC = 1$$



On a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

D'après le théorème de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en B.
Soit θ l'angle $\widehat{BAC}$. Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{AB}{AC} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{BC}{AC}$$

soit

$$\cos(\theta) = x \text{ et } \sin(\theta) = y$$

D'où la proposition. □

Proposition 2.1.3. *Les fonctions* cos *et* sin *sont* 2π*-périodiques.*

Démonstration.
On sait que le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$. Le rayon du cercle trigonométrique étant 1, son périmètre est donc 2π.
Ainsi, le point M correspondant à l'angle θ est le même que celui correspondant à l'angle $\theta + 2\pi$.
Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \text{ et } \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

Donc les fonctions *cos* et *sin* sont 2π-périodiques. □

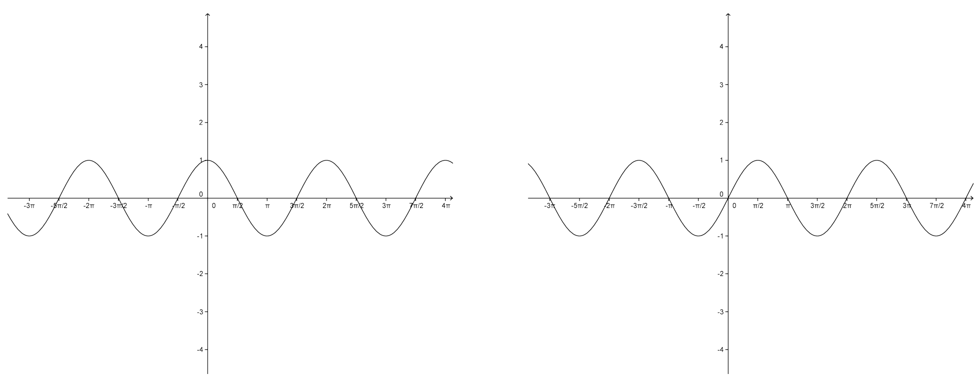


FIGURE 2 – Les courbes des fonctions *cos* et *sin*

2.1.2 Construction des fonctions sinusoïdales

Proposition 2.1.4. *A l'aide d'une fonction* cos *ou* sin*, on peut construire une fonction périodique de n'importe quelle période.*

Démonstration.
Soit $T > 0$. On cherche à construire une fonction T-périodique.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$. Montrons que f est T-périodique.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+T) &= \sin\left(\frac{2\pi}{T}(x+T)\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{T}x + 2\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \text{ (car sin est } 2\pi\text{-périodique)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est T-périodique. □

Remarque 2.1.3. *Les courbes des fonctions* cos *et* sin *ont même forme. En fait il suffit d'effectuer une translation horizontale de* $\frac{\pi}{2}$ *pour passer de la première à la deuxième. Algébriquement, cela se traduit par la relation :*

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x) \textit{ pour tout } x\in\mathbb{R}$$

On peut d'ailleurs se convaincre de cela à l'aide de la figure du cercle trigonométrique.

Remarque 2.1.4. *On peut définir une famille de fonctions dont la courbe a une forme comparable à celle de* sin *ou* cos*. Ce sont les courbes correspondant aux fonctions f définies pour tout x réel par :*

$$f(x)=A\sin(x+\varphi) \textit{ où } A\in\mathbb{R}^* \textit{ et } \varphi\in\mathbb{R}$$

Définition 2.1.2. On appelle toute fonction f s'écrivant de la forme $f(x)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}x+\varphi\right)$, une fonction sinusoïdale et la courbe associée à f une sinusoïde.

Vocabulaire 1.

- A est appelé l'amplitude de f.
- φ est appelé phase initiale ou phase à l'origine de f.
- T est appelé la période de f.

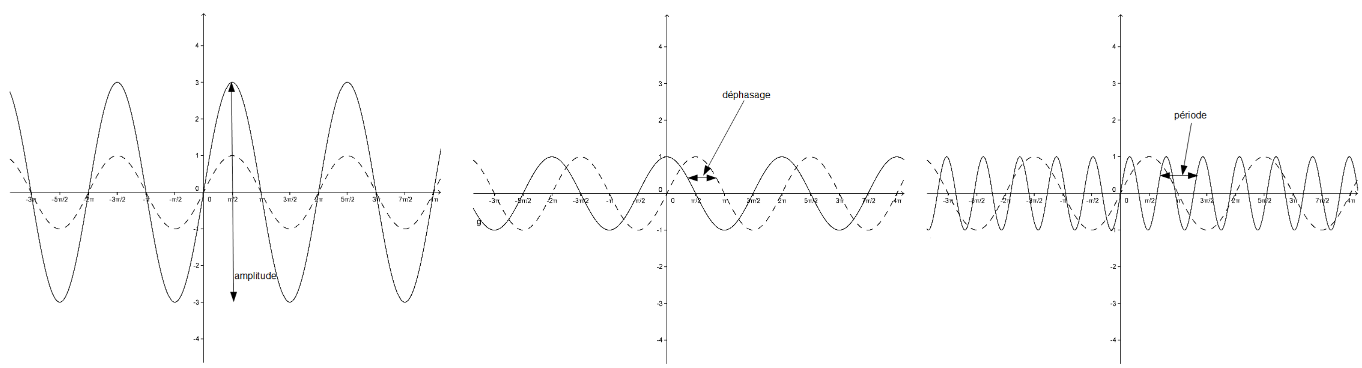


FIGURE 3 – Sinusoïde et fonction *sin*

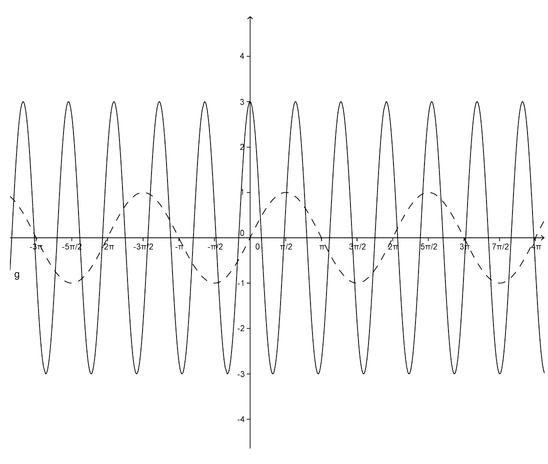


FIGURE 4 – Une sinusoïde quelconque

Remarque 2.1.5. *On peut étendre la définition de l'amplitude à une fonction périodique quelconque en la définissant comme la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de la fonction si celle-ci est bornée et comme valant $+\infty$ sinon.*
Dans la plupart des cas étudiés ici, la fonction sera continue. Etant de plus périodique, elle sera bornée et atteindra ses bornes. Ainsi, son amplitude sera simplement la différence entre son maximum et son minimum.

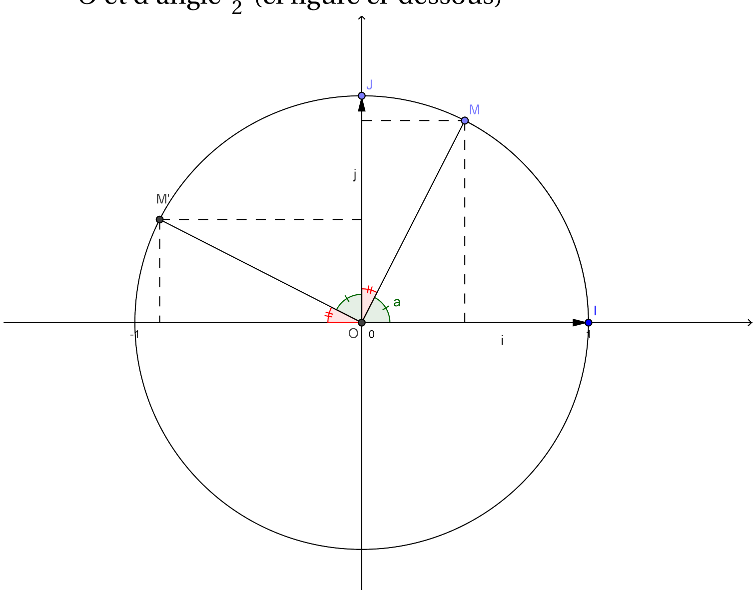
2.1.3 Remarque technique utile

L'objet de ce paragraphe est de démontrer la proposition 2.1.5 qui nous sera utile pour l'explication de la théorie de Fourier (cf paragraphe 2.3). Pour ce faire, on doit d'abord démontrer le lemme suivant :

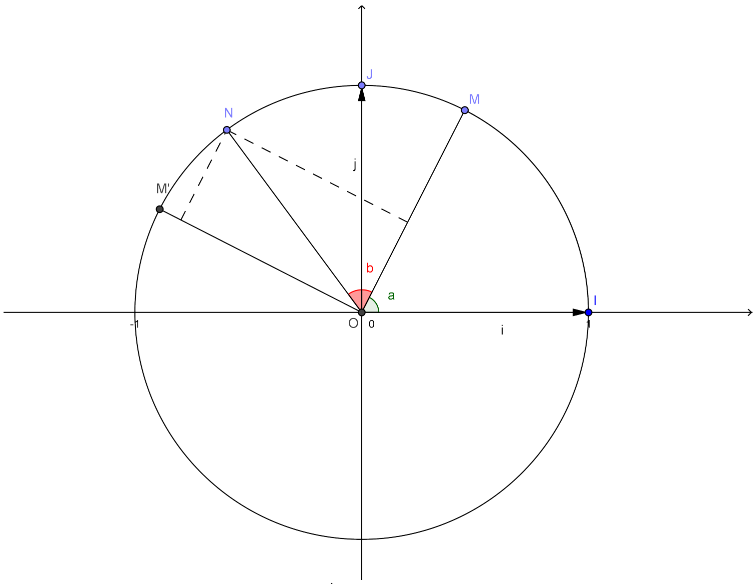
Lemme 2.1.1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,*
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Démonstration.
On se place dans le cercle trigonométrique du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Soient a et $b \in \mathbb{R}$. Soient M et M' les points du cercle trigonométrique tels que :
- l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = a$
- l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}$

Ainsi, on peut considérer également le repère $(O; \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.
Dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$,
- M a pour coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$, autrement dit $\overrightarrow{OM} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$
- M' a pour coordonnées $(-\sin(a), \cos(a))$, autrement dit $\overrightarrow{OM'} = -\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}$
  Cela vient du fait que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire que M' est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (cf figure ci-dessous)



Soit N le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = b$.



Dans le repère $(O; \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, N a pour coordonnées $(\cos(b), \sin(b))$, autrement dit :

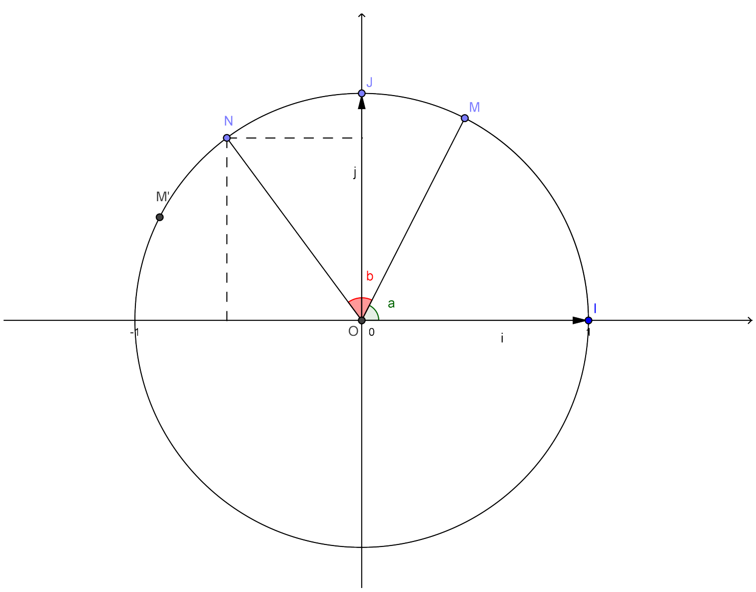
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ON} &= \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OM'} && (2.3)\\
&= \cos(b)\left(\cos(a)\overrightarrow{i} + \sin(a)\overrightarrow{j}\right) + \sin(b)\left(-\sin(a)\overrightarrow{i} + \cos(a)\overrightarrow{j}\right) && (2.4)\\
&= \cos(b)\cos(a)\overrightarrow{i} + \cos(b)\sin(a)\overrightarrow{j} - \sin(b)\sin(a)\overrightarrow{i} + \sin(b)\cos(a)\overrightarrow{j} && (2.5)\\
&= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\overrightarrow{i} + (\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))\overrightarrow{j} && (2.6)
\end{aligned}$$

On a d'autre part :

$$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = a + b$$

Dans $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, N a donc pour coordonnées $(\cos(a+b), \sin(a+b))$, autrement dit :

$$\overrightarrow{ON} = \cos(a+b)\overrightarrow{i} + \sin(a+b)\overrightarrow{j} \qquad (2.7)$$



Par identification entre les équations 2.6 et 2.7, on obtient :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

$\square$

Proposition 2.1.5. *Pour tout $A, B \in \mathbb{R}$ non tous nuls, les fonctions de la forme $f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + B\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ sont des fonctions sinusoïdales et l'amplitude de f est $\sqrt{A^2+B^2}$.*

Démonstration.
Soit une fonction f telle que :

$$\begin{aligned} f(x) &= A\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + B\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) && (2.8)\\ &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right) && (2.9)\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 &= \frac{A^2}{A^2+B^2} + \frac{B^2}{A^2+B^2}\\ &= \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1.2, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ et } \sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

En reprenant l'équation 2.9, on obtient :

$$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos(\varphi)\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + \sin(\varphi)\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right)$$

D'après le lemme précédent, on a :

$$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}x + \varphi\right)$$

Donc f est une fonction sinusoïdale d'amplitude $\sqrt{A^2+B^2}$. □

2.2 L'expérience des cordes vibrantes de Sauveur

2.2.1 Quelques notions de théorie musicale élémentaire

Définition 2.2.1. Dans la musique classique, on appelle *gamme*[1] une série de 7 notes *do ré mi fa sol la si.*

Remarque 2.2.1. *Les notes de cette gamme correspondent aux touches blanches du piano. Le fait qu'il y ait plus de 7 touches blanches s'explique par le fait qu'il y a plusieurs* do*, plusieurs* ré *à différentes hauteurs. On peut ainsi préciser de quel* do *on parle par exemple, en ajoutant un chiffre derrière la note. Ainsi, on parle de* do4, la3...

Définition 2.2.2. On définit un intervalle en musique comme l'écart de hauteur entre 2 notes de la gamme.

Vocabulaire 2. Les musiciens parlent ainsi de *seconde, tierce, quarte, quinte, sixte, septième, octave, neuvième, dixième....*
Par exemple, l'intervalle *do-fa* est une quarte car il y a 4 notes pour passer de *do* à *fa* qui sont *do, ré, mi* et *fa.*

Remarque 2.2.2. *L'intervalle d'octave est particulièrement intéressant car c'est l'écart qu'il y a entre deux notes consécutives qui portent le même nom. Par exemple, entre* do4 *et* do5*. En terme de fréquence (cf définition 2.2.3), l'intervalle d'octave est caractérisé par le fait que la fréquence de la note aigüe est égale à 2 fois celle de la plus grave.*

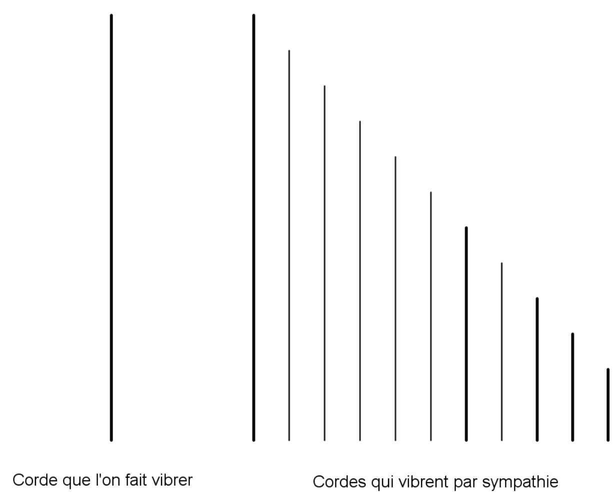
1. Pour simplifier, on parle ici uniquement de la gamme de *do* majeur, c'est-à-dire sans # et *b*.

2.2.2 L'expérience de Sauveur

Définition 2.2.3. La *fréquence* f d'une fonction périodique se définit comme l'inverse de la période T.
$f = \frac{1}{T}$. Elle correspond au nombre de périodes qu'il y a en une seconde. Elle est exprimée en Hertz, noté Hz. Dans l'étude du son, la fréquence est en fait la fréquence d'oscillation acoustique.

Remarque 2.2.3. *Le fait d'utiliser la* fréquence *plutôt que la* période *pour caractériser la* hauteur *s'explique par le fait que la période est généralement très petite et alors peu parlante (cf remarque 3.1.2).*

Au début du XVIIIe siècle, Joseph Sauveur, physicien français, permit de mettre en lumière l'hypothèse qu'un *son musical* pouvait se décomposer en plusieurs autres *sons musicaux* élémentaires. L'expérience qu'il a faite consiste à étudier les vibrations de plusieurs cordes d'instruments de musique comme celles d'un piano [2] par exemple, qui sont de différentes longueurs. Sauveur remarque alors que s'il fait vibrer une des cordes pour produire un son, d'autres cordes vibrent également mais pas toutes. Ce phénomène est appelé vibration par *sympathie*, c'est un cas particulier du phénomène de résonance expliqué au paragraphe 3.2.1.
En fait, les cordes qui vibrent par sympathie sont celles qui ont une fréquence de vibration qui est un multiple entier de la fréquence de la corde que l'on excite. Ces cordes produisent des sons correspondant en fait à l'unisson, à l'octave au dessus de la note produite par la corde vibrante, à la douzième (ou octave+quinte) au-dessus, à la double octave au dessus et à la dix-septième (double-octave+tierce) au dessus... Par exemple, si la corde que l'on excite produit un *do2*, les cordes correspondant aux *do2, do3, sol3, do4, mi4* et éventuellement certaines autres plus aigües, vibrent également. Comme cela est représenté sur le schéma ci dessous (les cordes représentées en gras correspondant à celles qui vibrent par sympathie), nous considérons que les cordes ont une fréquence de vibration inversement proportionnelle à leur longueur [3]. Ainsi, ce sont les cordes qui ont la même longueur ou qui sont 2 fois plus courte, 3 fois plus courte, 4 fois plus courte que la corde que l'on fait vibrer, qui vibrent également.



L'hypothèse est alors établie qu'un *son musical* serait composé d'autres *sons musicaux* élémentaires, un de même hauteur et d'autres plus aigus, dont, plus précisément, la fréquence serait un multiple de la fréquence du son étudié. L'observation de ce phénomène physique va relancer la réflexion sur la décomposition des *sons musicaux* et la théorie que va par la suite élaborer Fourier a permis de proposer un modèle mathématique en adéquation avec ces observations expérimentales sur les cordes vibrantes.

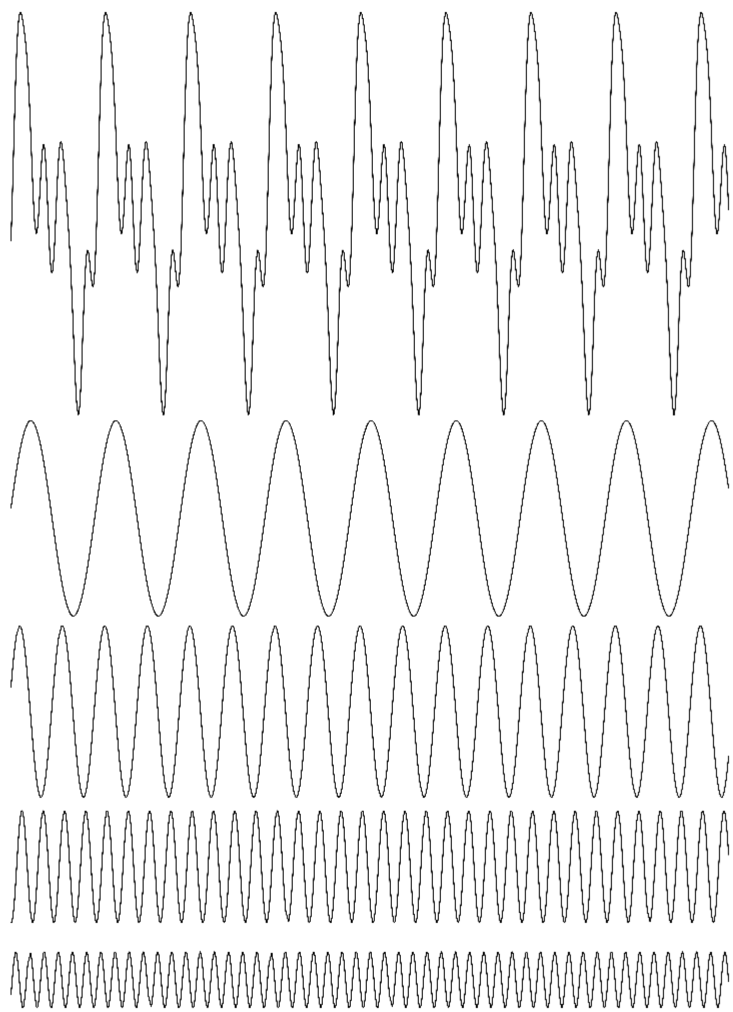
2. Ce serait en fait plutôt celles d'un clavecin ou d'une harpe, le piano n'existant pas encore à l'époque

3. Le fait que pour une corde donnée, la fréquence de vibration est inversement proportionnelle à la longueur de la corde qui vibre, est considéré comme connu à l'époque de Sauveur. Ce phénomène explique en particulier qu'une corde donne un son d'autant plus grave qu'elle vibre sur une grande longueur. Notre convention graphique signifie donc que les cordes sont de même nature, épaisseur et tension notamment.

2.3 Idée de Fourier

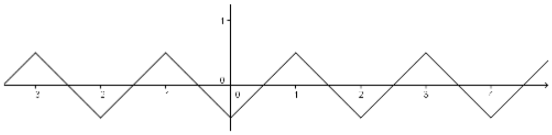
2.3.1 Idée générale

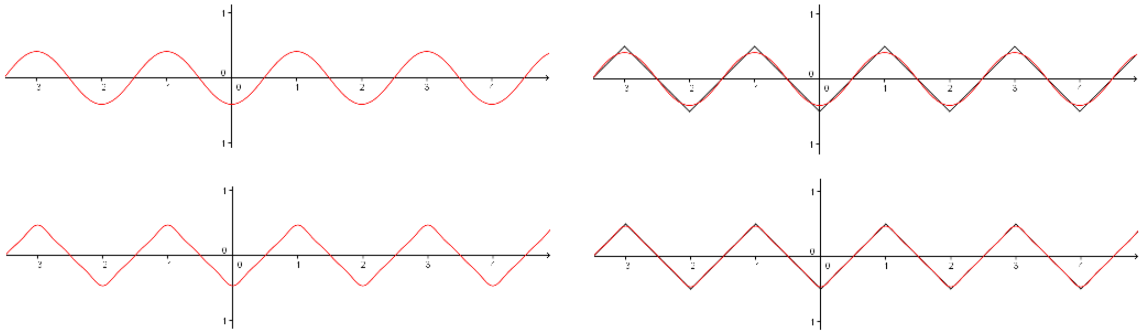
L'idée de Fourier repose sur le fait de décomposer toute fonction T-périodique en une somme de fonctions périodiques plus simples (les fonctions sinusoïdales) dont les fréquences sont des multiples de la fréquence de la fonction f que l'on souhaite décomposer [4]. On peut voir par exemple ci-dessous, la décomposition en 4 fonctions d'une fonction périodique.



Dans le cas général, cette décomposition est infinie, c'est-à-dire qu'il faut sommer une infinité de fonctions sinusoïdales pour retrouver exactement la fonction de départ. Les sons correspondant à ces fonctions s'appellent les *harmoniques* de la fonction de départ (cf vocabulaire 3). En fait, dans la majorité des cas, une décomposition ne prenant que les premiers harmoniques suffit à avoir une bonne approximation de cette fonction.
Prenons l'exemple d'une fonction triangulaire. La figure ci-après montre ce qu'est la décomposition de Fourier de cette fonction d'abord jusqu'au deuxième harmonique puis jusqu'au cinquième. On peut remarquer que le résultat est déjà très proche de la fonction de départ.

4. En fait, la période de chaque fonction périodique plus simple est un diviseur de la période de f, c'est-à-dire pour chaque fonction plus simple, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'elle soit $\frac{T}{n} - périodique$. D'après la proposition-définition 1.2.1, chaque fonction est donc aussi $n\frac{T}{n}$-périodique c'est-à-dire T-périodique.





2.3.2 Ecriture mathématique

Formellement, la décomposition de Fourier d'une fonction périodique est de la forme :

$$\left(a_1\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)+b_1\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\right)\ +\ \left(a_2\cos\left(\frac{4\pi}{T}x\right)+b_2\sin\left(\frac{4\pi}{T}x\right)\right)\ +\ \ldots\ +\ \left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\right)+\ldots$$

Notation 2. Cette somme s'écrit de manière condensée de la manière suivante :

$$\sum_{k\geqslant 1} a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)+b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$$

Remarque 2.3.1. *D'après la proposition-définition 1.2.1 et la démonstration de la proposition 2.1.4, chaque terme de la somme est T-périodique. D'après la remarque 1.2.3, la fonction donnée par cette forme est T-périodique.*

Proposition 2.3.1. *Chaque terme de la somme est $\frac{T}{k}$-périodique. Ainsi, la fréquence f_k de chaque terme est un multiple de la fréquence f de la fonction.*

Démonstration.

– Intéressons-nous par exemple à la partie en *sin* d'un terme, la partie en *cos* se traitant exactement de la même manière.
  Soient $T>0$, $k\in\mathbb{N}^*$ et $b_k\in\mathbb{R}$. Posons :

$$h(x)=b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$$

  Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} h\left(x+\frac{T}{k}\right) & = & b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{T}\left(x+\frac{T}{k}\right)\right) \\ & = & b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x+\frac{2k\pi}{T}\frac{T}{k}\right) \\ & = & b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x+2\pi\right) \\ & = & b_k\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)\ \text{(car sin est } 2\pi\text{-périodique)} \\ & = & h(x) \end{array}$$

  Donc h est $\frac{T}{k}$-périodique.

– Calculons la fréquence f_k de h :

$$f_k = \frac{1}{\frac{T}{k}} = \frac{k}{T} = k\frac{1}{T} = kf$$

Donc la fréquence de h est un multiple de la fréquence fondamentale.

□

Vocabulaire 3.

– Les sons correspondant aux termes avec $k \geq 1$ sont appelés respectivement *harmonique de rang k*. La fréquence de chacun est un multiple entier de la fréquence de la fonction et d'après la proposition 2.1.5, chacun de ces harmoniques est une fonction sinusoïdale d'amplitude $\sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}$. Ainsi, à chaque fréquence multiple de la fréquence de la fonction, est associée une amplitude. C'est ce qu'on appelle le *spectre* de Fourier de la fonction.
– Les réels a_k et b_k sont appelés les *coefficients de Fourier* et caractérisent l'amplitude de l'harmonique k (cf proposition 2.1.5).

Conclusion 2. L'expérience de Sauveur sur les cordes vibrantes trouve une description mathématique par la théorie de Fourier sur la décomposition des fonctions périodiques. Mais les conclusions mathématiques sur les fonctions périodiques correspondent-elles à une véritable réalité physique ? Helmholtz, grand scientifique allemand du XIXe siècle se pose la question de la pertinence du modèle mathématique dans sons livre *Théorie Physiologique de la musique* : "*Ce mode de décomposition des formes vibratoires, tel que le décrit et le rend possible le théorème de Fourier, ne serait-ce qu'une fiction mathématique, admissible pour la facilité du calcul, mais ne correspondant pas nécessairement à quelque chose dans la réalité ? Pourquoi considérer la vibration pendulaire*[5] *comme l'élément irréductible de tout mouvement vibratoire ? Nous pouvons imaginer un tout partagé d'une foule de manières différentes ; dans un calcul, nous pouvons trouver commode de remplacer le nombre 12 par 8+4, pour mettre 8 en évidence ; mais il ne s'ensuit pas que 12 doive être, toujours et nécessairement, considéré comme la somme de 8 et de 4. Dans d'autres cas, il pourra être plus avantageux de considérer ce nombre comme la somme de 7 et de 5. La possibilité mathématique, établie par Fourier, de décomposer en vibrations simples tout mouvement sonore, ne peut nous autoriser à conclure que ce soit là le seul mode admissible de décomposition, si nous ne pouvons prouver qu'il a un sens réel.*"

5. La *vibration pendulaire* désigne le mouvement d'un pendule. Ce mouvement, comme celui du ressort ou du diapason (cf partie 3.1.1) correspond à une sinusoïde, considéré comme un mouvement de base.

3 Pertinence du modèle

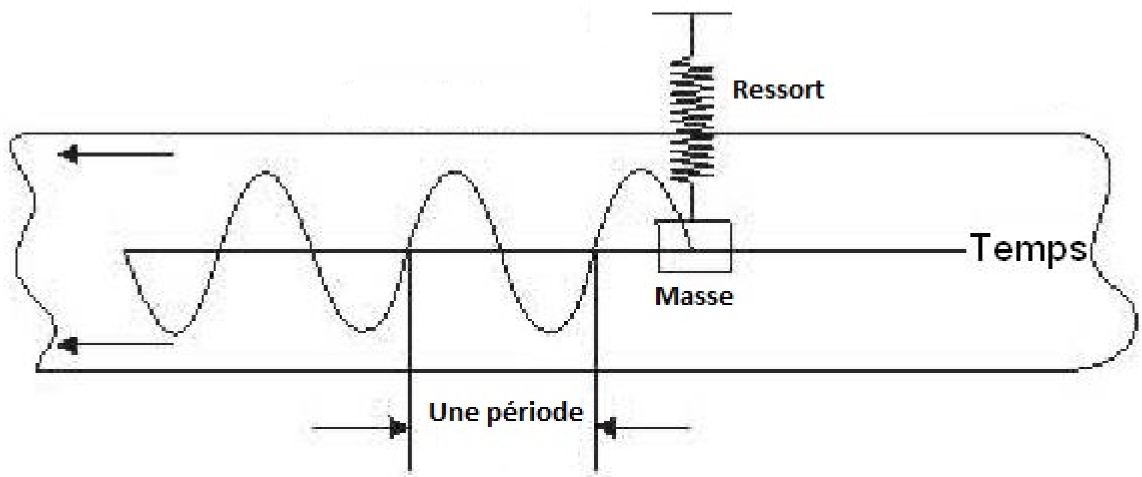
3.1 Correspondance entre le modèle mathématique et le son au XIXe siècle

3.1.1 Remarques sur les vibrations sinusoïdales

On peut se demander pourquoi l'on s'intéresse aux fonctions sinusoïdales plus qu'à d'autres fonctions périodiques pour étudier des vibrations. En fait l'observation de phénomènes physiques présents dans la nature permet de le justifier en partie. En voici deux exemples :

L'exemple du ressort

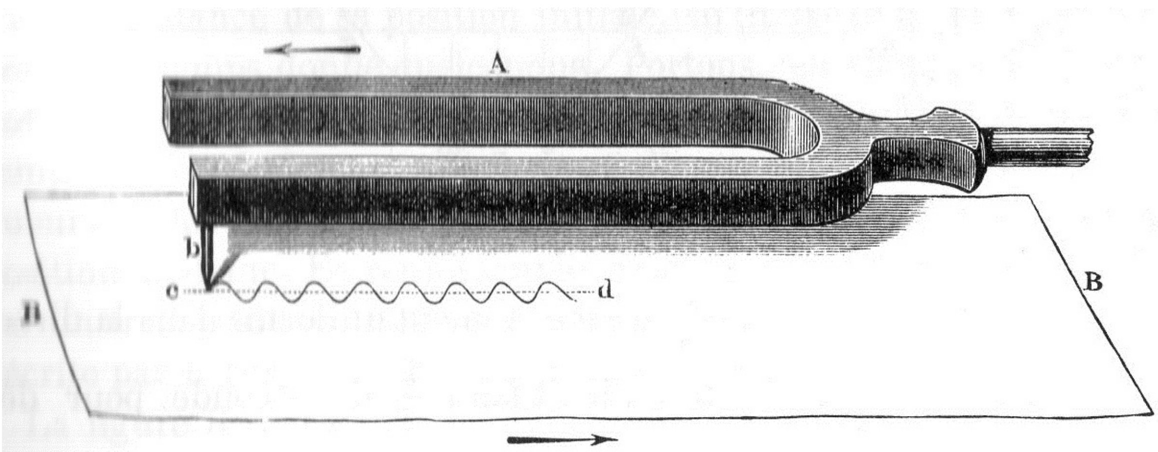
On considère une masse accrochée à un ressort verticalement. On suppose que ce ressort est parfait, c'est-à-dire que la force de rappel est proportionnelle à son allongement. On cherche à étudier la position de la masse au cours du temps. Le problème principal pour étudier ce phénomène est que la position de la masse varie sur un segment de droite qu'elle parcourt plusieurs fois. Il n'est donc pas possible de voir l'évolution de la trace laissée par cette masse sur une feuille de papier située derrière le ressort car nous verrons juste le segment qu'elle a parcouru. Une manière astucieuse, que connaissent bien les physiciens, de contourner ce problème est de faire défiler la feuille de papier (sur un support rigide) à vitesse constante selon la direction orthogonale à celle du déplacement de la masse. Ainsi, la trace laissée sur le papier donne la hauteur de la masse en fonction du temps. On peut alors observer que cette trace est un fait une sinusoïde (cf schéma ci-dessous).



Remarque 3.1.1. *A l'époque actuelle, le ressort est souvent pris comme exemple de mouvement sinusoïdal car relativement facile à montrer. Cependant, d'un point de vue historique, l'exemple du diapason est apparu en premier. D'ailleurs, Helmholtz n'évoque pas le ressort mais bien le diapason sans son livre.*

L'exemple du diapason

Le diapason est un outil utilisé par les musiciens pour donner la hauteur d'une note repère, généralement le *la*, afin de s'accorder pour les instrumentistes ou de débuter sur la bonne note pour les chanteurs. Il est constitué de deux branches parallèles se rejoignant et prolongées par une tige permettant de le tenir. Son principe de fonctionnement est assez simple. Il suffit de mettre en vibration ses deux branches, généralement en les percutant contre quelque chose de solide. La vibration de ces branches engendre alors une onde stationnaire. Cette onde stationnaire est perceptible si l'on met le diapason très proche de l'oreille et donne ainsi le *la* pour une seule personne sans que les autres ne l'entendent. Intéressons-nous au mouvement de l'une des branches du diapason au cours du temps. À l'oeil nu, il est très difficile de voir ce mouvement. En utilisant un dispositif similaire à celui de l'expérience avec le ressort et en grossissant ensuite la trace laissée par le diapason, on obtiend également une courbe très proche de celle d'une sinusoïde. Nous pouvons voir cela ci-dessous, sur une illustration extraite du livre de Helmholtz (cf [2] dans la bibliographie).



Conclusion 3. Ces deux exemples montrent que les fonctions sinusoïdales ne sont pas seulement un outil mathématique théorique mais se retrouvent aussi dans l'observation et la modélisation de phénomènes physiques. Dans notre cas, elles se retrouvent même dans le phénomène étudié qui est le son avec l'exemple de celui du diapason. C'est pourquoi on peut les considérer comme des fonctions périodiques de base et la théorie de Fourier en valide l'intérêt mathématique.

Remarque 3.1.2. *En fait, la période de la fonction représentant la courbe du mouvement d'une des branches d'un diapason au cours du temps a une période très petite, de l'ordre de la ms et c'est en fait le cas de la plupart des sons musicaux. Cette unité est peu parlante et l'on voit mal par exemple la différence qu'il peut y avoir entre une période de 2 ms et une de 3,2 ms. C'est pourquoi, nous utilisons plutôt une autre grandeur pour décrire les fonctions périodiques modélisant les sons musicaux. Il s'agit de la* fréquence *(cf définition 2.2.3)* .

Exemple 3.1.1. Pour le diapason, une de ses branches effectue en fait 440 battements par seconde. La fréquence du son produit est donc 440 Hz.

3.1.2 Fonctions périodiques et caractéristiques du son

L'étude des fonctions périodiques correspondant à différents sons musicaux a montré qu'il existe un lien étroit entre les caractéristiques de ces fonctions et les caractéristiques du son. A l'époque de Helmholtz, les correspondances suivantes étaient déjà connues :

La durée du son correspond à la longueur de l'intervalle sur lequel est définie la fonction qui le représente.

La hauteur du son est reliée à la fréquence (et donc la période) de la fonction qui le représente. Plus un son est aigu, plus la fréquence est élevée (et la période petite) et plus le son est grave, plus la fréquence est basse (et la période grande).

L'intensité du son est reliée à l'amplitude de la fonction qui le représente. Plus l'amplitude est grande, plus le son sera perçu comme fort et plus l'amplitude est petite, plus le son sera perçu comme faible.

Cependant, il faut bien faire attention de ne pas prendre ces relations comme des rapports de proportionnalité car ce n'en sont pas !

3.1.3 Le timbre

La seule caractéristique du son qui n'a pas de lien direct avec la fonction périodique qui le représente est le timbre. Helmhotlz nous explique la situation. "*Les variétés de timbre paraissent être en nombre infini, si on considère d'abord, que nous avons déjà une longue série d'instruments divers pouvant donner la même note, que les différents exemplaires d'un même instrument, et les voix de différents individus accusent encore et toujours dans le timbre certaines nuances plus délicates également appréciées par l'oreille ; quelques fois même la même note peut être donnée par le même instrument, avec de nombreuses modifications dans le timbre.[...] Quant à la question de savoir à quelles différences physiques extérieures des ondes sonores, correspondent les différents timbres, nous avons déjà vu, qu'à l'amplitude de la vibration correspondait l'intensité, et à la durée de la vibration*[6]*, la hauteur. Le timbre ne peut pas dépendre de ces deux éléments. La seule hypothèse, restant possible, est que le timbre dépende de l'espèce et de la nature du mouvement, dans l'intervalle de la période de chaque vibration isolée. Pour la production d'un son musical, nous l'avons vu, le mouvement du corps sonore doit être seulement périodique, c'est-à-dire, exactement semblable dans chaque période de vibration, à ce qu'il était dans la période précédente. Quant à la nature du mouvement dans chaque période, elle était restée tout à fait indifférente, si bien que, sous ce rapport encore, les variétés de mouvement sonore sont en nombre infini.*"
En fait, dans une première approche, on pourrait dire que la *forme* de la fonction correspond au timbre. On peut noter qu'il est aussi difficile de définir cette forme que de définir le timbre. Cette difficulté l'est d'autant plus que l'on a remarqué que parfois la forme des fonctions peut être proche et pourtant le timbre parait assez différent. A l'inverse, des sons ayant des timbres proches à l'oreille peuvent être représentés par des fonctions de forme assez différente. Une seconde approche permet de mettre en évidence l'importance de l'attaque (le tout début d'un son) dans la reconnaissance d'un timbre et donc d'un instrument.
Intéressons-nous néanmoins à la première approche qui est celle étudiée par Helmholtz. Elle est certes imparfaite mais correspond cependant à une certaine vérité mathématique et musicale.

Définition 3.1.1. On appelle son *pur* ou son *simple* un son dont la représentation graphique correspond à une sinusoïde.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.1.2, la fréquence de la fonction caractérise la hauteur du son. La valeur des coefficients de Fourier des différentes harmoniques et plus précisément leur amplitude $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ (cf proposition 2.1.5) caractérisent le timbre. Le terme *harmonique* est d'ailleurs bien connu des musiciens. On peut interpréter la théorie de Fourier en musique par le fait qu'un son se décompose en plusieurs sons *purs* de fréquence correspondant à celles des harmoniques.

3.2 Utilisation du phénomène de résonance

3.2.1 Le phénomène de résonance

Différents types d'ondes

Onde progressive : Il s'agit d'une onde qui se déplace. Dans le cas d'une onde sonore progressive, un auditeur placé à quelques mètres du point d'émission de l'onde peut l'entendre. La voix humaine et les instruments de musique produisent par exemple des ondes sonores progressives.

Onde stationnaire : Il s'agit d'une onde qui ne se déplace pas. Dans le cas d'une onde sonore stationnaire, il faut être très proche (quelques cm) du point d'émission de l'onde pour pouvoir l'entendre. C'est notamment le cas d'une onde produite par un diapason (cf partie 3.1.1)

Oscillation d'une structure physique

Toute structure physique est dotée d'oscillations propres, c'est-à-dire que sans contraintes extérieures cette structure a un mouvement d'oscillation.

6. Helmholtz entend par *durée de vibration* ce que nous avons appelé *période*.

Exemple 3.2.1. Un pendule ou une balançoire admettent des oscillations propres visibles à l'oeil nu. Ces oscillations finissent par s'arrêter à un moment à cause des forces de frottements de l'air.

Définition 3.2.1. On appelle fréquence propre (ou fréquence de résonance) d'un système la fréquence de ses oscillations propres.

Remarque 3.2.1. *Généralement, ces oscillations, très faibles et sans excitations extérieures, ne créent qu'une onde stationnaire.*

Phénomène de résonance d'un point de vue physique

D'un point de vue physique, le principe de résonance s'explique par la configuration suivante :
- un système physique de fréquence de résonance f_0 animé de ses oscillations propres (souvent de très faible amplitude) et créant une onde stationnaire.
- une onde progressive de fréquence f_0 et éventuellement de faible amplitude

Dans cette situation, chaque vibration de l'onde progressive augmente l'amplitude des oscillations du système physique. C'est ce phénomène que l'on appelle le phénomène de résonance.

Phénomène de résonance en musique

Dans le langage musical courant, on qualifie de *résonance* tout phénomène qui permet d'augmenter la durée ou l'intensité d'un son.

Exemple 3.2.2. Il est possible de rendre audible le son produit par un diapason en le mettant en contact par exemple avec une table après avoir mis en vibration les branches de celui-ci. Cette vibration provoque l'oscillation de la surface de la table à la même fréquence que l'onde stationnaire produite par le diapason. Cela permet alors de créer une onde progressive de même fréquence que celle de l'onde stationnaire mais cette fois-ci parfaitement audible. Ce processus est souvent qualifié de phénomène de résonance même si au sens physique strict du terme cela n'en est pas un.

3.2.2 Le résonateur d'Helmholtz

On désigne par *résonateur d'Helmholtz* un appareil de forme sphérique avec deux orifices placés de manière opposée, l'un servant à mettre à l'oreille. Un tel appareil possède une fréquence de résonance. Ainsi, par phénomène de résonance, si une onde sonore progressive émise à proximité d'un orifice du résonateur contient cette fréquence, une onde stationnaire d'amplitude croissante se crée à l'intérieur du résonateur. Le son produit est alors audible, si l'on porte l'autre orifice à l'oreille. Un des principaux avantages d'un tel appareil est qu'il amplifie de manière significative les sons correspondant à sa fréquence de résonance, un peu ceux qui ont une fréquence proche et pas du tout les sons qui ne contiennent pas cette fréquence. Helmholtz affirme d'ailleurs :"*On peut s'assurer facilement par des expériences des propriétés des résonateurs. Qu'on en mette un à l'oreille, et qu'on fasse exécuter, par des instruments quelconques, un morceau de musique à plusieurs parties, dans lequel revienne souvent le son propre du résonateur. Chaque fois, l'oreille l'entendra retentir d'une manière éclatante à travers tous les sons de l'accord.*"
L'intérêt de tels appareils repose également sur le fait que l'on peut en construire avec une fréquence propre que l'on choisit et qui dépend essentiellement du volume du résonateur. Pour un son donné, on peut ainsi savoir si une fréquence donnée fait partie de l'ensemble des sons simples qui composent de son en utilisant le résonateur ayant cette fréquence pour fréquence propre. C'est ainsi qu'Helmholtz a pu valider, d'un point de vue des sciences physiques, la théorie de Fourier pour la décomposition des sons.

Validation de la théorie de Fourier grâce aux résonateurs

L'expérience d'Helmholtz consiste à écouter un son *musical* (au sens où il a une hauteur) provenant d'un instrument de musique ou de la voix par exemple à travers plusieurs résonateurs différents. Il remarque que quand la fréquence propre du résonateur est un multiple de la fréquence du son joué ou chanté, il entend le son correspondant dans le résonateur. A l'inverse, lorsque qu'il prend un résonateur de fréquence propre éloignée de tout multiple de la fréquence du son joué ou chanté, il n'entend aucun son dans le résonateur. Cela donne ainsi un sens physique à la décomposition du son visible mathématiquement avec la théorie de Fourier. Tout son musical se décompose en plusieurs sons *purs* appelés harmoniques et il est possible d'entendre ces harmoniques grâce aux résonateurs d'Helmholtz.

3.3 Modèle mécanique

3.3.1 Analyseur de son d'Helmholtz et Koenig

Helmholtz a voulu aller plus loin dans la décomposition du son et dans la validation de la théorie de Fourier. Il a voulu mettre en évidence le fait que l'amplitude de chaque harmonique composant un son caractérisait le timbre, après avoir remarqué, en utilisant ces résonateurs, "*que tous les harmoniques ne se rencontrent pas toujours dans le son d'un seul instrument et qu'ils présentent des intensités très différentes d'un instrument à l'autre.*" Il fit cela en créant une machine permettant d'analyser un son. Cette machine est constituée de plusieurs résonateurs ayant chacun une fréquence de résonance correspondant à la fréquence d'un des premiers harmoniques d'un son de base de fréquence f_0. Chaque résonateur est relié à une lame métallique qui en se soulevant plus ou moins module l'ouverture d'un robinet de gaz. Un système de flamme permet au gaz de se consumer lorsqu'il sort. En fait, lorsqu'un son est émis à proximité de l'analyseur de son, une onde stationnaire se forme dans chaque résonateur qui a pour fréquence propre une fréquence faisant partie de ce son. L'amplitude de cette onde stationnaire dépend de l'amplitude de la fréquence correspondante dans le son de départ. Ainsi, le robinet de gaz sera plus ou moins ouvert pour chaque résonateur et la flamme plus ou moins grande. Mais la hauteur d'une flamme de taille variable étant difficile à visualiser directement, un système de miroir tournant actionné par une manivelle permet par le phénomène de rémanence rétinienne de voir la hauteur moyenne de chaque flamme et d'en déduire ainsi qualitativement l'intensité de chaque harmonique dans le son de départ.

Remarque 3.3.1. *Cet analyseur peut être considéré comme la première machine qui a été capable de procéder à une décomposition de Fourier du son. Aujourd'hui, l'ordinateur fait cela très bien et l'on peut ainsi voir le spectre de Fourier d'un son à partir de sa fonction périodique. Cependant, l'ordinateur n'utilise pas un procédé similaire à cette machine mais un procédé basé sur une théorie mathématique permettant à partir de toute fonction périodique de calculer de manière rapide l'amplitude de chaque harmonique.*

3.3.2 Analogie avec le fonctionnement de l'oreille

Nous devons maintenant signaler qu'Helmholtz, avant d'être un physicien et un mathématicien, a eu une formation de médecin militaire. Son grand intérêt pour les sciences l'a amené à suivre les cours des autres disciplines ou à apprendre directement par lui-même. Cela a été possible grâce à la forte croissante des Universités en Allemagne à cette époque et à cette soif de savoir qu'il avait depuis son enfance. Il explique par exemple : "*Avec un jeune ami, nous tentions avec nos moyens limités, toutes les expériences que nous trouvions décrites. Nous étudiâmes avec méthode l'action des acides sur le linge de maison de nos mères;[...]*". Par la suite, ses travaux montrent son goût prononcé pour l'expérimentation et son talent lui permit de créer des machines souvent très astucieuses afin de prouver certaines de ses hypothèses. C'est notamment le cas avec l'analyseur de sons étudié précédemment. Mais Helmholtz avait également le désir de toujours se rapporter à la perception [7] des phénomènes. Avec ses connaissances en physiologie, il s'est naturellement intéressé au fonctionnement de l'oreille et a émis des hypothèses sur le traitement du son par celle-ci en analogie avec son analyseur de sons.

Description générale de l'oreille

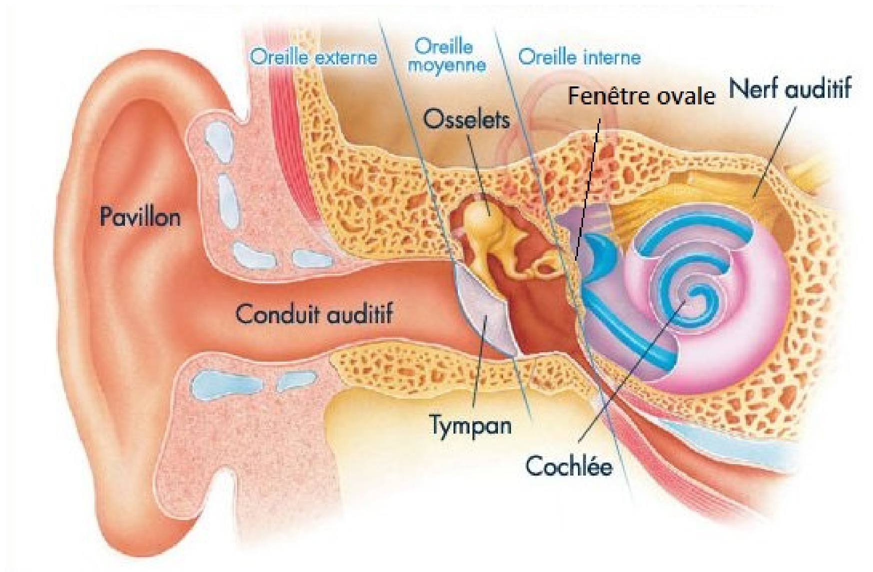
L'oreille est composé de trois parties (cf schéma ci-dessous) :

L'oreille externe principalement constituée du pavillon et du conduit auditif permet de transmettre les ondes sonores au tympan. Le tympan est une membrane qui délimite l'oreille externe de l'oreille moyenne et qui vibre aux fréquences de vibration des sons qui lui sont transmis.

L'oreille moyenne contient des osselets entourés de muscles permettant de transformer les vibrations dues à l'air du tympan en vibrations solidiennes des osselets plus facile à transmettre ensuite à l'oreille interne. Les muscles autour des osselets permettent, au besoin, de réduire (si le son est trop fort) l'amplitude des vibrations pour protéger l'oreille interne et transmettre un signal le plus clair possible à l'oreille interne par le biais d'une membrane appelée fenêtre ovale.

7. Il a travaillé aussi bien en optique qu'en acoustique.

L'oreille interne est constituée essentiellement d'un canal enroulé à la manière d'un escargot rempli d'un liquide appelé l'endolymphe. Ce canal s'appelle la cochlée et se situe à l'intérieur d'un os vraisemblablement pour être protégé d'éventuels chocs. Les vibrations des osselets sont transmis à ce liquide et ensuite transformées en influx nerveux comme en attestent les nombreuses terminaisons nerveuses arrivant dans cette zone et reliées au cerveau.



Remarque 3.3.2. *Nous avons ici décrit uniquement les éléments de l'oreille servant au traitement du son. D'autres éléments de l'oreille servent notamment au maintien de l'équilibre.*

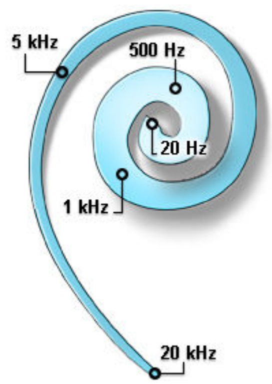
Le rôle de la cochlée selon Helmholtz

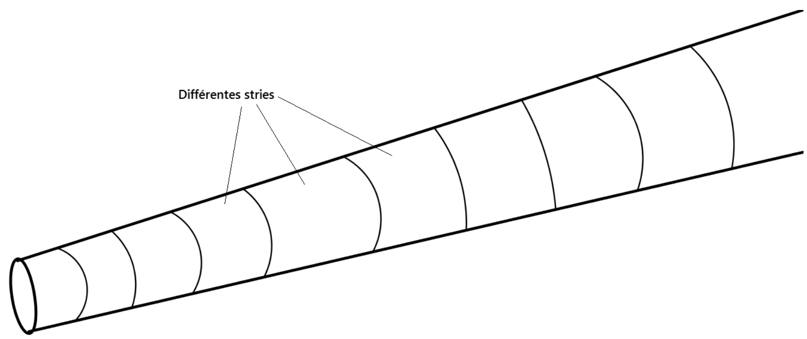
Helmholtz a remarqué en déroulant la cochlée que celle-ci était plus étroite près de la fenêtre ovale et qu'elle s'élargissait de plus en plus jusqu'au bout appelé l'apex. Il a également remarqué qu'il y avait des stries (cf schéma ci-dessous), qu'il appelle *fibres de Corti*, le long de la rampe qui contient l'endolymphe à l'intérieur de la cochlée. Il a émis l'hypothèse que ces stries, à l'image de cordes vibrantes [8] avaient peut-être chacune une fréquence de résonance et qu'elles jouaient le même rôle que les résonateurs dans son analyseur de son (cf paragraphe 3.3.1), sous l'action des vibrations du liquide. Selon son hypothèse, les fréquences propres des stries iraient de la plus grande (strie la plus petite) à la plus petite (strie la plus grande) des fréquences perceptibles par l'oreille humaine. Lorsqu'un son contient la fréquence propre d'une strie, celle-ci vibrerait et transmettrait cette vibration au nerf et ainsi au cerveau. Jouant le rôle de la flamme de gaz dans l'analyseur de son, l'influx nerveux envoyé serait plus ou moins important selon l'amplitude de l'harmonique du son correspondant à la fréquence propre de la strie. Ainsi, l'analyseur de son de Helmholtz et l'oreille interne fonctionneraient de manière analogue. C'est comme cela que Helmholtz explique la perception du timbre : "*Un son simple arrive-t-il à l'oreille, il ébranlera fortement les fibres de Corti qui sont exactement ou à peu près, à l'unisson avec lui ; toutes les autres ne seront que peu ou point ébranlées*[9]*. Tout son simple d'une hauteur déterminée ne sera donc ressenti que par certaines fibres nerveuses, et des sons de hauteurs différentes exciteront des fibres différentes. S'il arrive à l'oreille un son complexe ou un accord, il affecte tous les prolongements élastiques correspondant aux divers sons simples. L'accord ou le son complexe devront donc être décomposés en leurs éléments constitutifs. On expliquerait aussi de cette manière pourquoi l'oreille décompose les mouvements de l'air précisément en vibrations pendulaires. Chaque molécule d'air ne peut naturellement exécuter qu'un seul mouvement, à un instant*

8. Helmholtz explique avoir émis l'hypothèse que le tissu de la cochlée était plus tendu dans le sens orthogonal à la longueur de celle-ci. C'est pour cela qu'il a fait le parallèle avec les cordes vibrantes.

9. Il veut dire par là que seules les stries ayant une fréquence de résonance proche de la fréquence du son vibreront.

donné. La théorie mathématique a considéré un mouvement de ce genre comme la somme de vibrations pendulaires[10] *; c'était d'abord une fiction arbitraire, pour la commodité de la théorie, sans signification dans la réalité. Nous avons rencontré d'abord une décomposition de ce genre, dans la théorie de la vibration par influence*[11] *: un mouvement périodique non pendulaire peut faire résonner par influence des corps accordés en différents tons*[12]*, correspondant aux harmoniques. Nous avons donc, grâce à notre hypothèse, ramené les phénomènes de l'ouïe à ceux de la vibration par influence, et nous trouvons là la cause qui fait qu'un mouvement périodique de l'air, simple dans son essence, produit une somme de sensations diverses et, par conséquent, apparaît comme complexe aux organes de la perception. La sensation de sons de différentes hauteurs serait donc, d'après cela, une sensation éprouvée dans des fibres nerveuses différentes. La sensation du timbre proviendrait donc de ce qu'un son complexe, outre les fibres de Corti correspondant au son simple fondamental, en mettrait encore un certain nombre d'autres en branle, et, par conséquent, déterminerait des sensations dans plusieurs groupes différents de fibres nerveuses.*"





Remarque 3.3.3. *Helmholtz avait également remarqué la présence de nombreux cils le long de la cochlée. Encore aujourd'hui, leur rôle n'est pas complètement défini même s'il parait assez clair qu'ils servent à transmettre les informations au cerveau grâce à leur vibration.*

Remarque 3.3.4. *Il a été montré plus tard que cette explication n'était pas complètement correcte et ne suffit pas à expliquer tous les phénomènes observés. Cependant, il existe des implants auditifs basés en partie sur cette théorie. Une personne sourde à cause d'une cochlée défectueuse peut subir une opération afin de remplacer celle-ci par des implants. Dans ce dispositif, le son recueilli est transmis aux terminaisons nerveuses arrivant tout le long de la cochlée par les implants électriques. On peut considérer que les lieux concernés jouent alors un rôle comparable à celui qu'Helmholtz prêtait aux stries qu'il avait observées. Le résultat permet à cette personne de pouvoir suivre une conversation avec une seule personne dans un environnement auditif calme.*

Les aspects psychologiques

Nous avons pu voir jusqu'à présent une description mécanique du fonctionnement de l'oreille. Cependant, il faut être conscient que d'autres aspects entrent en jeu. En effet, l'oreille humaine selon si elle entrainée ou pas ne transmet pas les informations avec la même précision. Ainsi, par exemple, l'oreille d'un musicien confirmé est capable d'entendre une différence de hauteur d'une même note jouée par deux personnes différentes et ne jouant pas très juste. Une oreille non entrainée n'entend parfois, elle, aucune différence.
Un autre aspect du fonctionnement de l'oreille concerne également le fait d'anticiper certains sons. Par exemple, le fait de voir quelque chose tomber permet d'anticiper le bruit au moment où l'objet va toucher le sol. Ainsi, l'oreille se protège, notamment grâce aux muscles à l'intérieur de l'oreille moyenne qui permettent de réduire l'intensité sonore perçue et de protéger l'oreille interne.

10. Il fait ici allusion à la théorie de Fourier.
11. Il s'agit en fait du phénomène de résonance.
12. Il fait ici référence à *ses* résonateurs.

Ces différents exemples montrent que les informations qui arrivent au cerveau ou qui y sont déjà, jouent également un grand rôle dans le fonctionnement de l'oreille et cette dernière ne peut donc pas être considérée comme une machine aussi simple.

Conclusion 4. Les travaux d'Helmholtz ont permis de faire de grandes avancées dans le domaine de l'acoustique. Le modèle du son basé sur la théorie de Fourier explique bien le fonctionnement des instruments de musique et en partie les différences de timbre de ceux-ci. Le modèle du fonctionnement de l'oreille proposé par Helmholtz permet, lui, malgré ses défauts, de comprendre le type de mécanismes qui s'y produisent. Ses travaux ont eu de multiples conséquences : compréhension de la nature des voyelles de la langue parlée, meilleure compréhension de divers phénomènes acoustiques et physio-acoustiques : sons supplémentaires perçus par l'oreille, phénomène de dissonance, rôle de la cochlée. Cette dernière a notamment servi de point d'appui aux progrès médicaux contemporains que nous avons évoqués. En cela, on peut considérer que son oeuvre scientifique est une oeuvre majeure du XIXe siècle et qu'elle est également révélatrice de l'esprit scientifique d'une époque qui s'est révélée féconde dans ces domaines.

Conclusion

Les travaux de Fourier puis d'Helmholtz ont permis de mieux comprendre les phénomènes sonores. Le modèle proposé n'est certes pas parfait et ne prend pas en compte le phénomène d'attaque dans la reconnaissance du timbre mais apporte des réponses satisfaisantes pour une première approche. Au XIXe siècle, les résultats d'Helmholtz ont été considérés comme une grande avancée dans le domaine de l'acoustique. Aujourd'hui, les recherches sur la compréhension du son, portent aussi bien sur les aspects mécaniques du fonctionnement de l'oreille que sur les aspects psychologiques entrant en compte dans le traitement de l'information par le cerveau. Les mathématiques sont alors moins présentes et la modélisation moins évidente, mais qui sait ce que nous réserverons de futures découvertes...

Références

[1] Eric DECREUX, *Mathématiques, sciences et musique - Une introduction historique*. Ellipses, 2008.

[2] Hermann HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la musique*. Victor Masson et fils, 1868.

[3] Claude-Henri CHOUARD, *L'oreille musicienne*. Gallimard, 2001.

[4] Emile LEIPP, *La machine à écouter*. Masson, 1977.

[5] Emile LEIPP, *Acoustique et musique*. Masson, 1977.

[6] Ouvrage collectif, *Les instruments de l'orchestre*. Belin, Bibliothèque "Pour la science", 1995.

[7] Patrice BAILHACHE, *Valeur actuelle de l'acoustique musicale de Helmholtz*. Revue d'histoire des sciences, 1995, Tome 39 n^{o} 4.

[8] Université de Strasbourg, *Instrument de démonstration en acoustique (analyseur manomètrique de Koenig à résonateurs de Helmholtz)*. Tiré de la page web :
http ://www.hp-physique.org/sdx/sriaulp/main.xsp

[9] Laurent MAZLIAK, *Décomposition spectrale pour le son musical*. Unité d'ouverture "Science et musique", Université Paris VI, 2010/2011. Tiré de la page web :
http ://www.proba.jussieu.fr/ mazliak/DecompositionSpectrale.pdf

[10] Guillaume ROUX, *Synthèse et réalisation d'études cliniques sur l'implant cochléaire*. Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme d'État d'Audioprothèse, Université de Rennes I, 2001. Tiré de la page web :
http ://cochlee.bretagne.pagesperso-orange.fr/Roux/roux.htm