Centre Galois

Orléans

Connaissez-vous les nombres réels ?

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans, France

Juin 2025

Quelques ensembles de nombres connus

- Entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
  Compter des objets, des personnes, ...
- Entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
  Étages d'un immeuble
- Nombre rationnels : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}, \dots\}$
  Partager une pizza

Deux propriétés des nombres rationnels

- On peut dénombrer les nombres rationnels, c-à-d en faire la liste.
  Pour les rationnels entre 0 et 1 :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2},\\
&\frac{1}{3}, \frac{2}{3},\\
&\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\\
&\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots
\end{aligned}
$$

  On dit que $\mathbb{Q}$ est dénombrable

- Entre deux rationnels, il existe toujours un autre rationnel :
  - Le point milieu de $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$
  - Le nombre $\frac{a+b}{c+d}$ est entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$

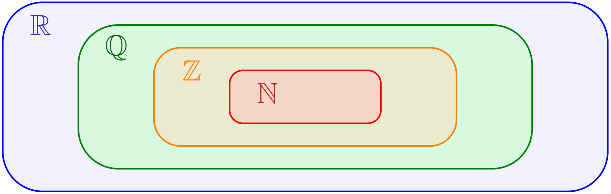
  La distance entre rationnels différents peut être arbitrairement petite.
  On dit que $\mathbb{Q}$ est dense

Les nombres irrationnels

Les nombres suivants sont des exemples de nombres réels qui ne peuvent pas s'écrire comme une fraction :

- $\sqrt{2} = 1{,}41421356237310\ldots$
- $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$
- Le nombre d'Euler
  $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = 2{,}71828182845905\ldots$

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.
Les nombres réels qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ sont appelés irrationnels



Le mathématicien Georg Cantor a montré que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Fractions continues

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. C'est la partie entière de x.
  $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\lfloor -0{,}5 \rfloor = -1$
- La partie fractionnaire de x est $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Elle appartient à $[0,1[$.
  $\{\frac{3}{2}\} = \frac{1}{2}$, $\{\pi\} = 0{,}141596\ldots$, $\{10\} = 0$, $\{-0{,}5\} = 0{,}5$

Soit x un nombre réel. On lui associe une suite $(a_0, a_1, \ldots)$ d'entiers comme suit :

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor \cdot \rfloor"'] & \bigcirc \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor \cdot \rfloor"'] & \bigcirc \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor \cdot \rfloor"'] & \cdots \\
a_0 & a_1 & a_2 &
\end{tikzcd}$$

La procédure s'arrête si on tombe sur une partie fractionnaire nulle.
On écrit alors $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

Exemple 1: Fraction continue de $\frac{13}{8}$

$$
\begin{tikzcd}
\frac{13}{8} \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & \frac{8}{5} \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & \frac{5}{3} \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & \frac{3}{2} \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 2 \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{13}{8} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = [1, 1, 1, 1, 2]$$

Exemple 2: Fraction continue de $\sqrt{2}$

$$\begin{tikzcd}
\sqrt{2} \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 2{,}41\ldots \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 2{,}41\ldots \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 2{,}41\ldots \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 2{,}41\ldots \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & \cdots \\
1 & 2 & 2 & 2 & 2 &
\end{tikzcd}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{(2-1)} = \sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$$

Exemple 3: Fraction continue de π

$$\begin{tikzcd}
\pi \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 7{,}06\ldots \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 15{,}9\ldots \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 1{,}0034\ldots \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & 292{,}63\ldots \arrow[r, "\frac{1}{\{\cdot\}}"] \arrow[d, "\lfloor\cdot\rfloor"'] & \cdots \\
3 & 7 & 15 & 1 & 292 &
\end{tikzcd}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \ldots}}}} = [3, 7, 15, 1, 292, \ldots]$$

Exemple 4: Fraction continue de e

$$
\begin{aligned}
e &= 2{,}71828182845905\ldots \\
&= \left[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,\ldots\right] \\
&= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}
\end{aligned}
$$

Lien entre rationalité et fraction continue

Théorème:

Le développement en fraction continue d'un nombre réel x est fini (on finit par tomber sur 0) si, et seulement si, x est rationnel.

Le nombre d'or

$$\phi = [1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}} \qquad = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}}$$

$$\Rightarrow \qquad \phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

$$\Rightarrow \qquad \phi^2 = \phi + 1$$

$$\Rightarrow \qquad \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618033988749895\ldots$$

Les nombres algébriques

Définition: (Nombre algébrique)

- *Un nombre irrationnel x est algébrique s'il existe un polynôme P à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$.*
- *Un nombre algébrique irrationnel est quadratique si P est de degré 2.*
- *Un nombre irrationnel qui n'est pas algébrique est appelé transcendent.*

Exemples :

- $\sqrt{2}$ est algébrique quadratique, $P(x) = x^2 - 2$
- le nombre d'or ϕ est algébrique quadratique, $P(x) = x^2 - x - 1$
- la racine cubique de 2, notée $\sqrt[3]{2}$ ou $2^{1/3}$, est algébrique non quadratique, $P(x) = x^3 - 2$

Théorème: (Lagrange)

Le développement en fraction continue d'un nombre réel x finit par devenir périodique si, et seulement si, x est un irrationnel quadratique.

Convergents

Soit $x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$.
Les convergents de x sont les rationnels $[a_0], [a_0, a_1], [a_0, a_1, a_2], \dots$

- $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \dots] = 3{,}14159265358979\dots$

  $[3] = 3$

  $[3, 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}1428571428\dots$

  $[3, 7, 15] = \frac{333}{106} = 3{,}1415094339\dots$

  $[3, 7, 15, 1] = \frac{355}{117} = 3{,}1415929203\dots$

- $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$

  Convergents : $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \dots$

- $\phi = [1, 1, 1, 1, 1, \dots]$

  Convergents : $2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$
  Ce sont des rapports de nombres de Fibonacci

Combien de convergents faut-il calculer pour approcher un nombre irrationnel avec une précision donnée ?

Nombres Diophantiens

Définition: (Nombre Diophantien)

Un nombre irrationnel x *est appelé Diophantien de type* (C, a) *pour des nombres* $C > 0$ *et* $a \geqslant 1$ *si*

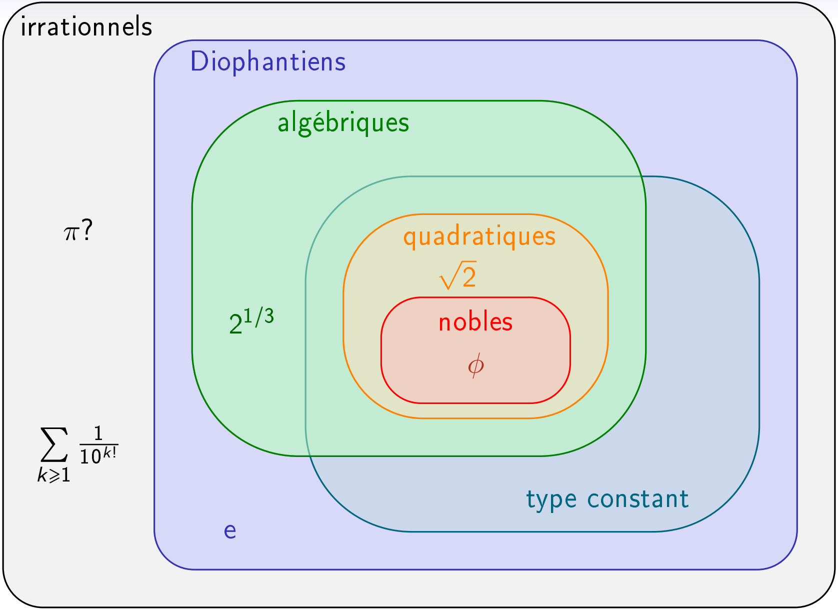
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{C}{|q|^{1+a}}$$

pour tous les $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{Z}$ *non nuls premiers entre eux.*
Si $a = 1$, x *est dit de type constant.*

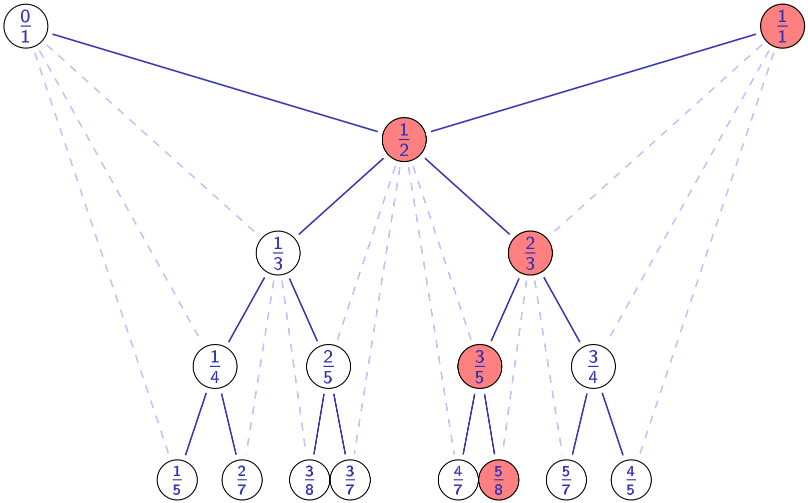
Théorème: (Liouville)

Soit x *un nombre algébrique, c-à-d* $P(x) = 0$, *avec* P *un polynôme de degré* n *à coefficients entiers.*
Si $P(x+y) = y^{k+1} Q(x,y)$ *avec* $Q(x,0) \neq 0$, *alors* x *est Diophantien de type* $(C, \frac{n}{k+1} - 1)$ *pour un* $C > 0$.
En particulier, les irrationnels quadratiques sont de type constant.

Résumé

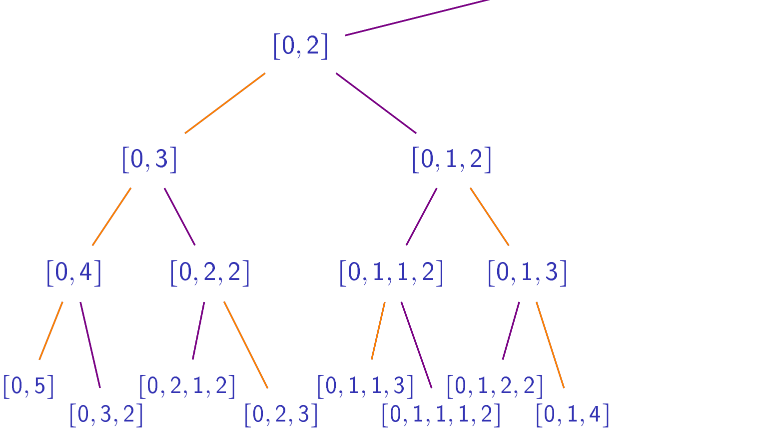

irrationnels
Diophantiens
algébriques
quadratiques
$\sqrt{2}$
nobles
ϕ
$2^{1/3}$
π?
$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{10^{k!}}$
type constant
e

L'arbre de Farey

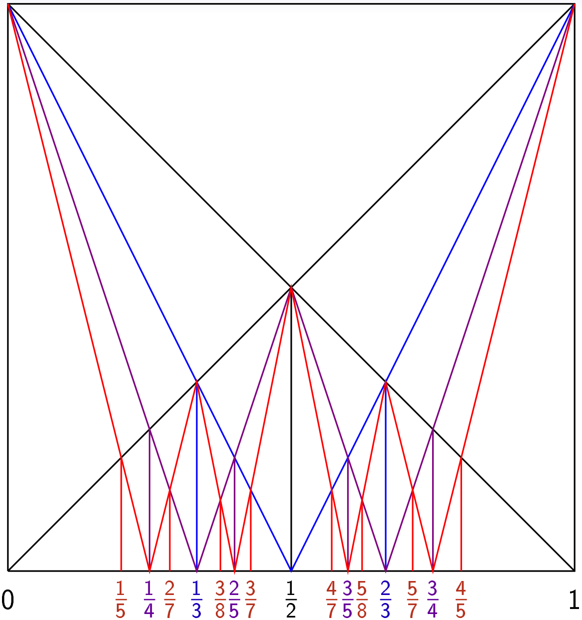


Arbre de Farey et fractions continues

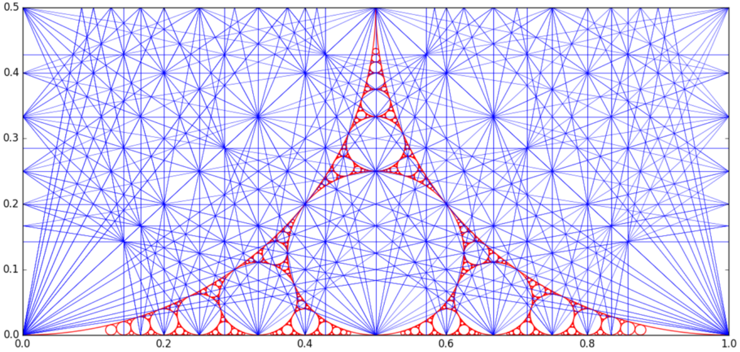
$$[\ldots, n] \mapsto [\ldots, n+1]$$
$$[\ldots, n] \mapsto [\ldots, n-1, 2]$$



Une construction géométrique

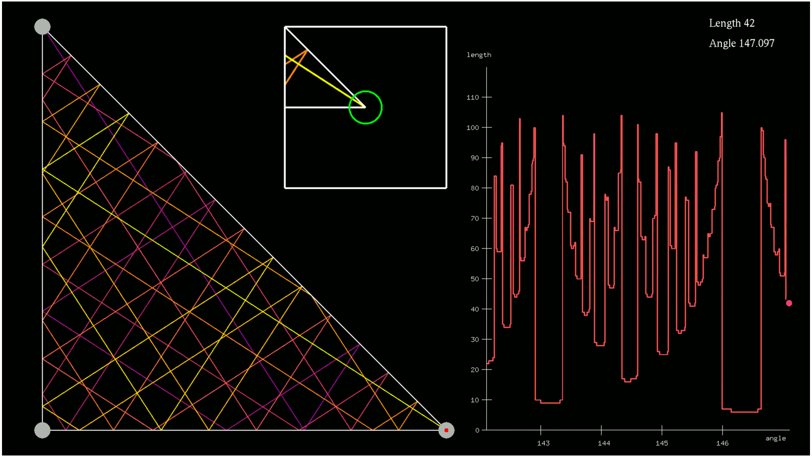


Arbre de Farey, cercles de Ford, et dentelle Appolonienne



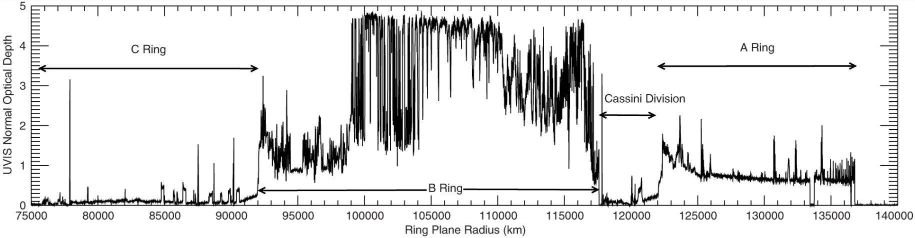
Cercle de Ford pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: centre $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, rayon $\frac{1}{2q^2}$

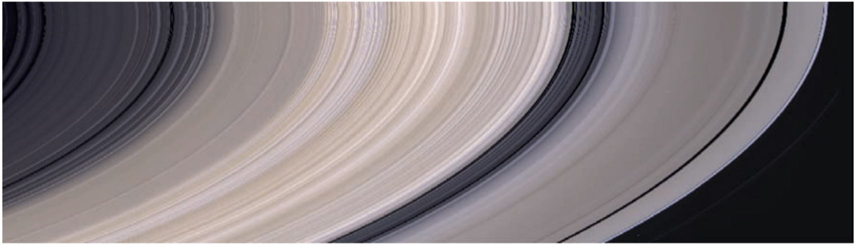
Le billard dans un triangle rectangle isocèle



(En ligne : https://youtu.be/M2-XdsccEj0)

Les anneaux de Saturne





Pour en savoir plus

- Sur YouTube :

  https://www.youtube.com/@NilsBerglund/

- Articles dans Images des mathématiques :

  https://images.math.cnrs.fr/

- Cette présentation :

  https://www.idpoisson.fr/berglund/Galois25.pdf