Résoudre des équations par le dessin

Nils Berglund

Institut Denis Poisson, Université d'Orléans
CNRS, UMR 7013
www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund

Centre Galois, Juin 2018

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$0{,}9 \cdot x = 1$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9}$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99}$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1 - a)x = 1$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 + ax$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\dots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\dots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned} (1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1+ax) \end{aligned}$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned}(1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2x\end{aligned}$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned}(1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2x \\ &= 1 + a + a^2(1+ax)\end{aligned}$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned} (1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x &= 1 + ax \\ &= 1 + a(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2x \\ &= 1 + a + a^2(1+ax) \\ &= 1 + a + a^2 + a^3x \end{aligned}$$

Premiers exemples (pour l'instant sans dessins)

$$0{,}9 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11111111\ldots$$

$$0{,}99 \cdot x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{0{,}99} = 1{,}01010101\ldots$$

$$(1-a)x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned}
(1-a)x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x &= 1 + ax \\
&= 1 + a(1+ax) \\
&= 1 + a + a^2x \\
&= 1 + a + a^2(1+ax) \\
&= 1 + a + a^2 + a^3x \\
&= \ldots \\
&= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots \quad ?
\end{aligned}$$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots$$ (pour certains a)

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots$$ (pour certains a)

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots$$ (pour certains a)

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Conjecture

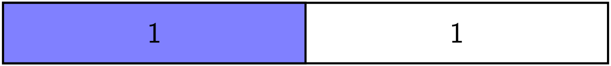
On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \;\; = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

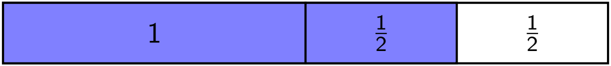
- ▷ $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- ▷ $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- ▷ $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$



Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

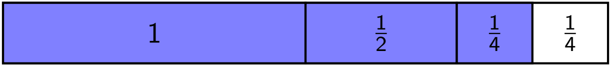
- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$



Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

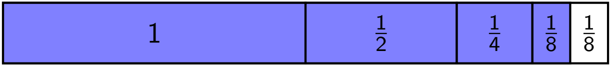
- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \; = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$



Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

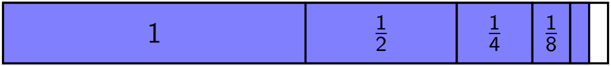
- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \;\; = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$



Conjecture

On a $\qquad \dfrac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad$ (pour certains a)

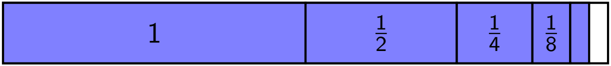
- ▷ $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- ▷ $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- ▷ $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$



Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \; = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

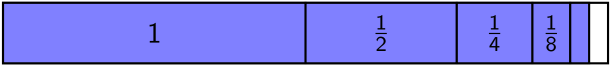


- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0}$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \;= 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

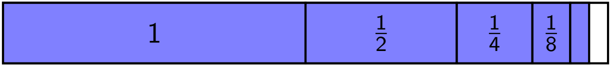


- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- ▷ $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\dots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- ▷ $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\dots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- ▷ $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \;\; = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

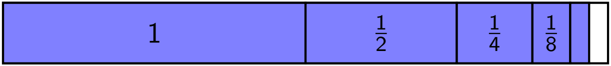


- ▷ $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$
- ▷ $a = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

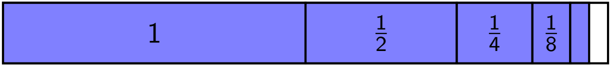


- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$
- $a = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} \qquad 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = ???$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \dots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \;= 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

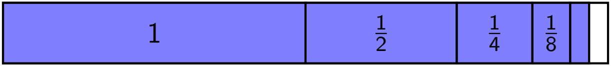


- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$
- $a = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} \qquad 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = ???$
- $a = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{1-2} = -1$

Conjecture

On a $$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \text{(pour certains } a\text{)}$$

- $a = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}1} = 1{,}11111111\ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$
- $a = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{1}{1-0{,}01} = 1{,}01010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \ldots$
- $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \ = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots$



- $a = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} \qquad 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$
- $a = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2} \qquad 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = ???$
- $a = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{1-2} = -1 \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \infty$

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a(1+a+a^2+\cdots+a^n)\end{aligned}$$

□

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a(1+a+a^2+\cdots+a^n) \\ &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a - a^2 - \cdots - a^n - a^{n+1}\end{aligned}$$

$\square$

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}
(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\
&\quad - a(1+a+a^2+\cdots+a^n) \\
&= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\
&\quad - a - a^2 - \cdots - a^n - a^{n+1} \\
&= 1 - a^{n+1}
\end{aligned}$$

$\square$

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a(1+a+a^2+\cdots+a^n) \\ &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad -a-a^2-\cdots-a^n-a^{n+1} \\ &= 1-a^{n+1}\end{aligned}$$

Par conséquent, si $a \neq 1$, alors $1+a+a^2+\cdots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

□

La série géométrique

Théorème

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \dots \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < a < 1$$

Démonstration.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Alors

$$\begin{aligned}(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a(1+a+a^2+\cdots+a^n) \\ &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\quad - a - a^2 - \cdots - a^n - a^{n+1} \\ &= 1 - a^{n+1}\end{aligned}$$

Par conséquent, si $a \neq 1$, alors $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Or $a^{n+1} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ si et seulement si $-1 < a < 1$. $\square$

Une équation du second degré

Considérons l'équation

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

Une équation du second degré

Considérons l'équation

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

Théorème

Soit l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On suppose $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant. Alors

- *si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$;*
- *si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $-b/(2a)$;*
- *si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.*

Une équation du second degré

Considérons l'équation

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

Théorème

Soit l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On suppose $a \neq 0$. *Soit* $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant. Alors*

- *si* $\Delta > 0$, *l'équation admet deux solutions réelles* $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$;
- *si* $\Delta = 0$, *l'équation admet une unique solution* $-b/(2a)$;
- *si* $\Delta < 0$, *l'équation n'admet pas de solution réelle.*

Dans notre cas, $b = -1$, $c = 1$ et donc $\Delta = 1 - 4a$.

Une équation du second degré

Considérons l'équation

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

Théorème

Soit l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On suppose $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant. Alors

- *si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$;*
- *si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $-b/(2a)$;*
- *si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle.*

Dans notre cas, $b = -1$, $c = 1$ et donc $\Delta = 1 - 4a$.
Donc si $a < \frac{1}{4}$, l'équation admet 2 solutions réelles

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}$$

Solution sous forme de série

$ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + ax^2$

Solution sous forme de série

$$\begin{aligned} ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\ &= 1 + a(1 + ax^2)^2 \end{aligned}$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4)
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$\begin{aligned} ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\ &= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\ &= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\ &= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\ &= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4 \end{aligned}$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\
&= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4 \\
&= 1 + a + 2a^2 + (1 + 4x^2)a^3 + (4x^2 + 2x^4)a^4 + \dots
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\
&= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4 \\
&= 1 + a + 2a^2 + (1 + 4x^2)a^3 + (4x^2 + 2x^4)a^4 + \dots \\
&= 1 + a + 2a^2 + 5a^3 + 14a^4 + \dots
\end{aligned}
$$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1 + ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\
&= 1 + a + 2a^2(1 + ax^2)^2 + a^3(1 + ax^2)^4 \\
&= 1 + a + 2a^2 + (1 + 4x^2)a^3 + (4x^2 + 2x^4)a^4 + \dots \\
&= 1 + a + 2a^2 + 5a^3 + 14a^4 + \dots
\end{aligned}
$$

Remarque : Cette série correspond à la solution $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}$

Solution sous forme de série

$$
\begin{aligned}
ax^2 - x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= 1 + ax^2 \\
&= 1 + a(1+ax^2)^2 \\
&= 1 + a(1 + 2ax^2 + a^2x^4) \\
&= 1 + a + 2a^2x^2 + a^3x^4 \\
&= 1 + a + 2a^2(1+ax^2)^2 + a^3(1+ax^2)^4 \\
&= 1 + a + 2a^2 + (1+4x^2)a^3 + (4x^2+2x^4)a^4 + \dots \\
&= 1 + a + 2a^2 + 5a^3 + 14a^4 + \dots
\end{aligned}
$$

Remarque : Cette série correspond à la solution $\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}$

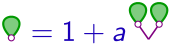
Question :

Y a-t-il un moyen plus simple de déterminer les coefficients

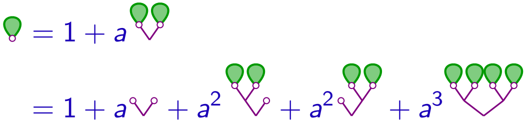
$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 14, \quad \dots \quad ?$$

Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$

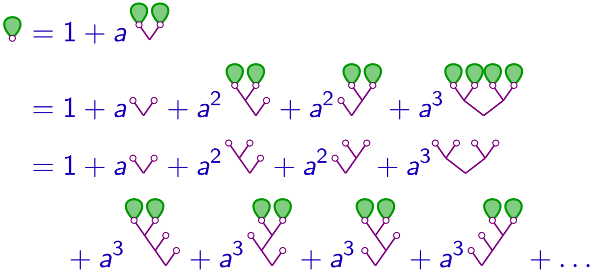


$$x = 1 + ax^2$$



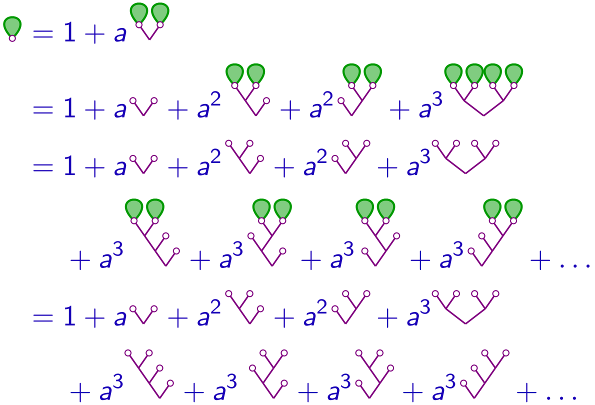
Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$



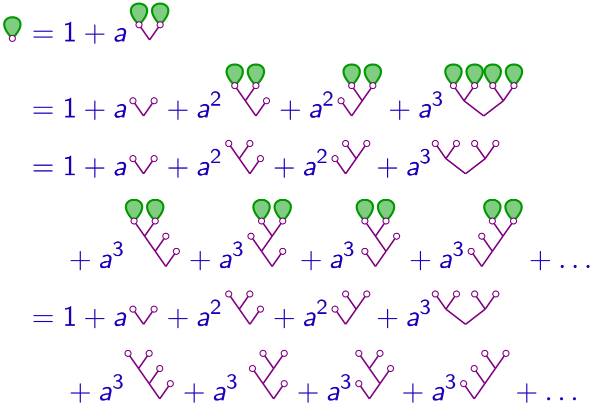
Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$



Représentation graphique

$$x = 1 + ax^2$$



Observation :

Le coefficient de a^n est égal au nombre d'arbres binaires à $n + 1$ feuilles.

Les nombres de Catalan

Notons C_n le nombre d'arbres binaires à $n+1$ feuilles. On l'appelle le $n$ième nombre de Catalan.

$C_0 = 1$	
$C_1 = 1$	
$C_2 = 2$	
$C_3 = 5$	
$C_4 = 14$	
$C_5 = ?$	
$\ldots$	

Eugène Charles Catalan (1814–1894)

Les nombres de Catalan

Notons C_n le nombre d'arbres binaires à $n+1$ feuilles. On l'appelle le $n$ième nombre de Catalan.

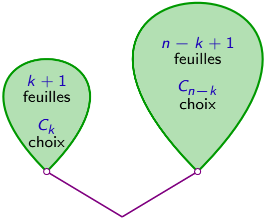
$C_0 = 1$	
$C_1 = 1$	
$C_2 = 2$	
$C_3 = 5$	
$C_4 = 14$	
$C_5 = ?$	
$\ldots$	

Eugène Charles Catalan (1814–1894)

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, . . .

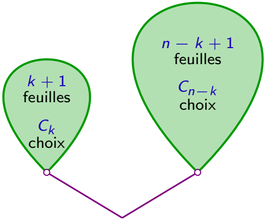
Une relation de récurrence

Un arbre binaire à $n+2$ feuilles est composé d'un arbre à $k+1$ feuilles et d'un arbre à $n-k+1$ feuilles avec $0 \leqslant k \leqslant n$.



Une relation de récurrence

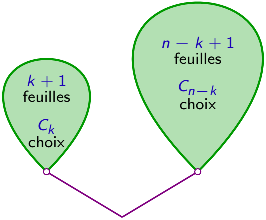
Un arbre binaire à $n+2$ feuilles est composé d'un arbre à $k+1$ feuilles et d'un arbre à $n-k+1$ feuilles avec $0 \leqslant k \leqslant n$.



$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0$$

Une relation de récurrence

Un arbre binaire à $n+2$ feuilles est composé d'un arbre à $k+1$ feuilles et d'un arbre à $n-k+1$ feuilles avec $0 \leqslant k \leqslant n$.



$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1 + C_n C_0$$

Exemples:

$$C_3 = C_0 C_2 + C_1^2 + C_2 C_0 = 2 + 1 + 2 = 5$$
$$C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$
$$C_5 = ?$$

Une autre formule pour les nombres de Catalan

Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}$$

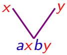
Une autre formule pour les nombres de Catalan

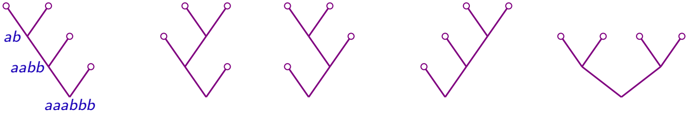
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





$\square$

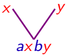
Une autre formule pour les nombres de Catalan

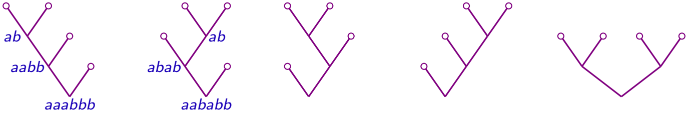
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





□

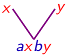
Une autre formule pour les nombres de Catalan

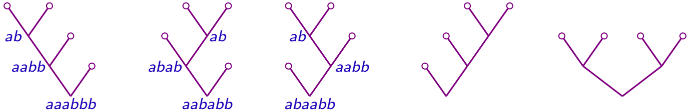
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





$\square$

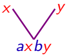
Une autre formule pour les nombres de Catalan

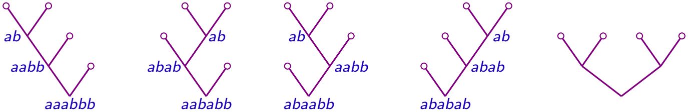
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





$\square$

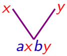
Une autre formule pour les nombres de Catalan

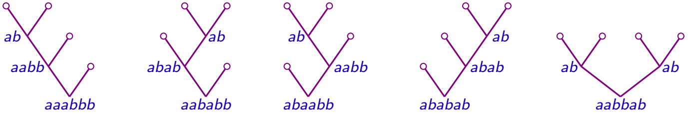
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





□

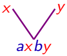
Une autre formule pour les nombres de Catalan

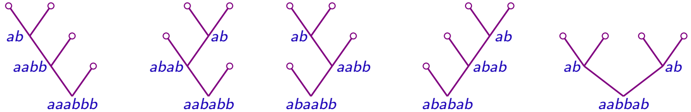
Théorème

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+2)}{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}$$

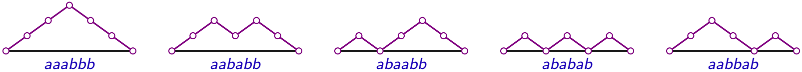
Idée de la démonstration.

On associe à chaque nœud un mot (les feuilles ayant un mot vide) :





Puis on associe à chaque mot une ligne brisée avec $a \mapsto /$ et $b \mapsto \backslash$.



On obtient des "excursions" de $2n$ pas, restant au-dessus de l'abscisse (appelés chemins de Dyck), que l'on sait compter ... $\square$

Raisonnement inverse

Soit

$$f(a) = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \dots$$

appelée la fonction génératrice des nombres de Catalan.

Raisonnement inverse

Soit

$$f(a) = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \dots$$

appelée la fonction génératrice des nombres de Catalan.

Calculons alors

$$f(a)^2 = (C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots)(C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots)$$

Raisonnement inverse

Soit

$$f(a) = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \dots$$

appelée la fonction génératrice des nombres de Catalan.
Calculons alors

$$\begin{aligned} f(a)^2 &= (C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots)(C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots) \\ &= C_0^2 + (C_0 C_1 + C_1 C_0)a + (C_0 C_2 + C_1^2 + C_2 C_0)a^2 \\ &\quad + (C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0)a^3 + \dots \end{aligned}$$

Raisonnement inverse

Soit

$$f(a) = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \dots$$

appelée la fonction génératrice des nombres de Catalan.
Calculons alors

$$\begin{aligned} f(a)^2 &= (C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots)(C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots) \\ &= C_0^2 + (C_0 C_1 + C_1 C_0)a + (C_0 C_2 + C_1^2 + C_2 C_0)a^2 \\ &\quad + (C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0)a^3 + \dots \\ &= C_1 + C_2 a + C_3 a^2 + C_4 a^3 + \dots \end{aligned}$$

Raisonnement inverse

Soit

$$f(a) = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \dots$$

appelée la fonction génératrice des nombres de Catalan.
Calculons alors

$$\begin{aligned} f(a)^2 &= (C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots)(C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots) \\ &= C_0^2 + (C_0 C_1 + C_1 C_0)a + (C_0 C_2 + C_1^2 + C_2 C_0)a^2 \\ &\quad + (C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0)a^3 + \dots \\ &= C_1 + C_2 a + C_3 a^2 + C_4 a^3 + \dots \\ &= \frac{f(a) - C_0}{a} \end{aligned}$$

Raisonnement inverse

Soit

$$f(a) = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \dots$$

appelée la fonction génératrice des nombres de Catalan.
Calculons alors

$$\begin{aligned} f(a)^2 &= (C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots)(C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots) \\ &= C_0^2 + (C_0 C_1 + C_1 C_0) a + (C_0 C_2 + C_1^2 + C_2 C_0) a^2 \\ &\quad + (C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0) a^3 + \dots \\ &= C_1 + C_2 a + C_3 a^2 + C_4 a^3 + \dots \\ &= \frac{f(a) - C_0}{a} \end{aligned}$$

Comme $C_0 = 1$ on retrouve alors l'équation de départ

$$af(a)^2 - f(a) + 1 = 0$$

satisfaite par x.
Ceci donne des informations sur le comportement des C_n pour n grand.

Résumé de cette partie

- Certaines équations admettent des solutions sous forme de série $x = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots$.
- Les coefficients $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ de cette série peuvent parfois être calculés par des méthodes graphiques.
- ⚠ La méthode ne donne pas toutes les solutions, et ne marche pas forcément pour toutes les valeurs du paramètre a.

Résumé de cette partie

- Certaines équations admettent des solutions sous forme de série $x = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots$.
- Les coefficients $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ de cette série peuvent parfois être calculés par des méthodes graphiques.
- ⚠ La méthode ne donne pas toutes les solutions, et ne marche pas forcément pour toutes les valeurs du paramètre a.

A méditer...

Comment résoudre les équations suivantes ?

$$ax^3 - x + 1 = 0$$

Résumé de cette partie

- Certaines équations admettent des solutions sous forme de série $x = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots$.
- Les coefficients $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ de cette série peuvent parfois être calculés par des méthodes graphiques.
- ⚠ La méthode ne donne pas toutes les solutions, et ne marche pas forcément pour toutes les valeurs du paramètre a.

A méditer...

Comment résoudre les équations suivantes ?

$$ax^3 - x + 1 = 0$$
$$ax^5 - x + 1 = 0$$

Résumé de cette partie

- Certaines équations admettent des solutions sous forme de série $x = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \dots$.
- Les coefficients $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ de cette série peuvent parfois être calculés par des méthodes graphiques.
- ⚠ La méthode ne donne pas toutes les solutions, et ne marche pas forcément pour toutes les valeurs du paramètre a.

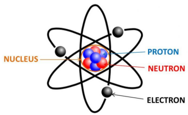
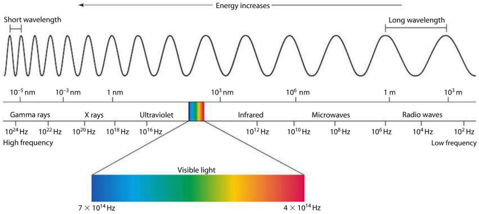
A méditer...

Comment résoudre les équations suivantes ?

$$ax^3 - x + 1 = 0$$
$$ax^5 - x + 1 = 0$$
$$ax^2 - x + 2 = 0$$

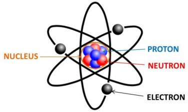
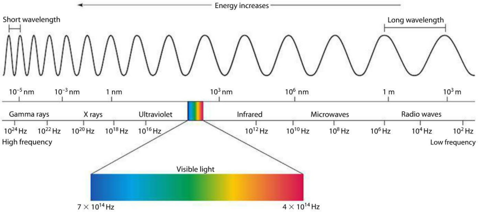
La Physique à la fin du XIXe siècle

L'univers est constitué

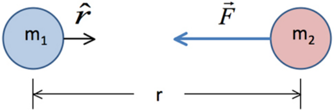
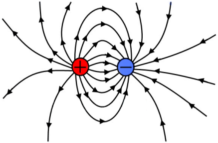
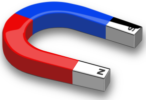
de matière (formée d'atomes)	et d'ondes électromagnétiques
	

La Physique à la fin du XIXe siècle

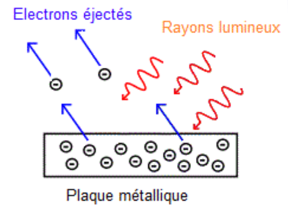
L'univers est constitué

de matière (formée d'atomes)	et d'ondes électromagnétiques
	

avec deux types d'interactions :

la gravitation	et les forces électromagnétiques
 $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$	 

Début du XXe siècle : nouveaux phénomènes

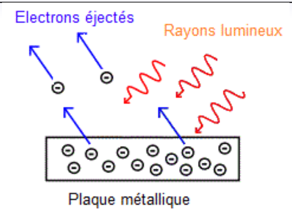
L'effet photoélectrique	
Nombre d'électrons émis $\propto$ fréquence de la lumière $\rightarrow$ Les ondes électromagnétiques sont-elles composées de particules (les photons) ?	

Début du XXe siècle : nouveaux phénomènes

L'effet photoélectrique

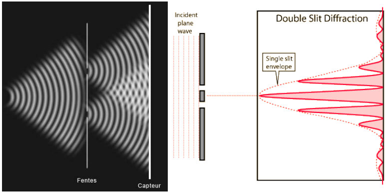
Nombre d'électrons émis $\propto$ fréquence de la lumière

$\rightarrow$ Les ondes électromagnétiques sont-elles composées de particules (les photons) ?



Expérience des fentes de Young

Des particules envoyées sur deux fentes forment des franges d'interférences comme si c'était des ondes

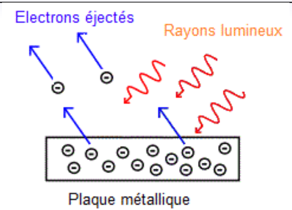


Début du XXe siècle : nouveaux phénomènes

L'effet photoélectrique

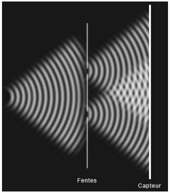
Nombre d'électrons émis $\propto$ fréquence de la lumière

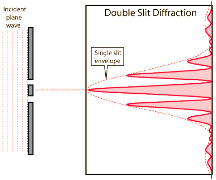
$\rightarrow$ Les ondes électromagnétiques sont-elles composées de particules (les photons) ?



Expérience des fentes de Young

Des particules envoyées sur deux fentes forment des franges d'interférences comme si c'était des ondes





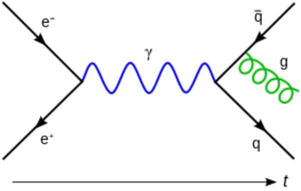
Nouvelles lois de la physique : la mécanique quantique

Équation de Newton $\rightarrow$ Équation de Schrödinger

Des nouveaux types d'interactions et de particules. . .

Richard Feynman (1918–1988)

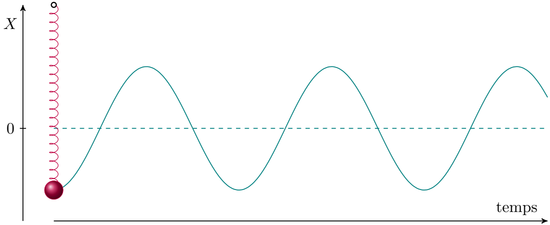
Richard Feynman (1918–1988)



- Prix Nobel de Physique 1965 (avec Schwinger et Tomonoga) pour le développement de l'électrodynamique quantique
- Le Cours de physique de Feynman (titre original : Feynman Lectures on Physics)
- Collection d'anecdotes dans Vous voulez rire, monsieur Feynman ! (Surely You're Joking, Mr. Feynman!)
- Commission d'enquête sur l'accident de la navette spatiale Challenger

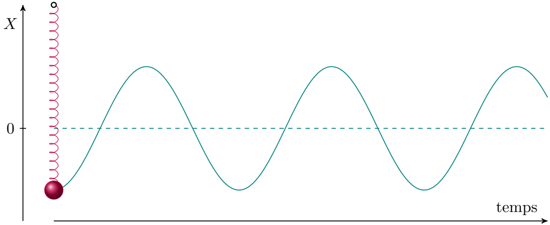
Un autre exemple : l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique, c'est simplement une bille au bout d'un ressort :

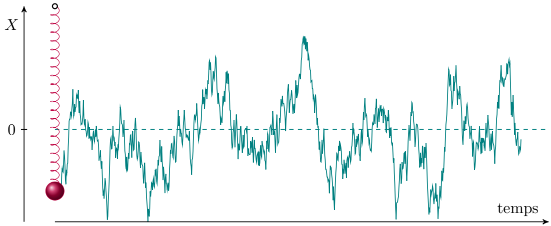


Un autre exemple : l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique, c'est simplement une bille au bout d'un ressort :



Mais si la bille est très petite, et plongée dans un fluide chauffé ?



Un peu de physique statistique

L'énergie du ressort est donnée par

$$E = \frac{1}{2}kX^2$$

X : longueur du ressort moins sa longueur au repos

k : constante de raideur du ressort

Un peu de physique statistique

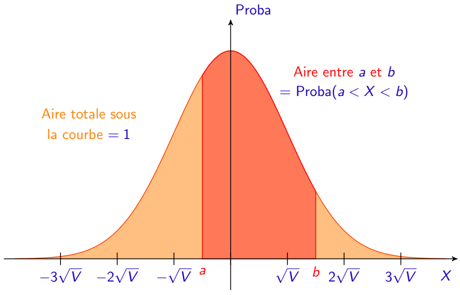
L'énergie du ressort est donnée par

$$E = \frac{1}{2} k X^2$$

X : longueur du ressort moins sa longueur au repos
k : constante de raideur du ressort

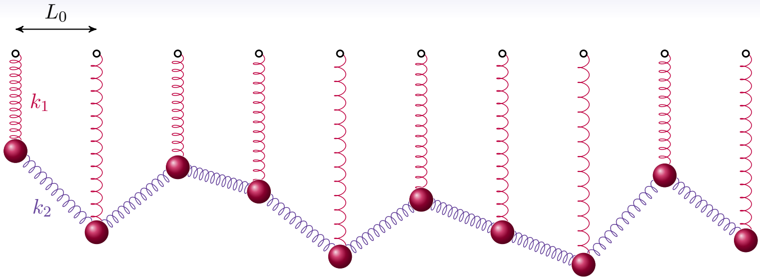
Principe de Boltzmann–Gibbs

À l'équilibre à température T (mesurée en degrés Kelvin), X suit une distribution normale de moyenne 0 et variance $V = \frac{k_B T}{k}$ où $k_B = 1{,}38064852 \times 10^{-23}$ Joules/Kelvin est la constante de Boltzmann.

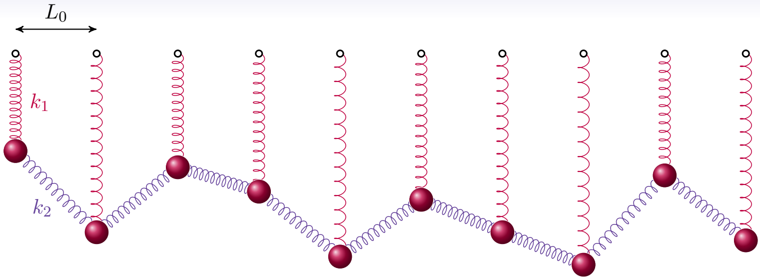


Moyenne de X : $\langle X \rangle = 0$
Variance de X : $\langle X^2 \rangle = V$

Plusieurs ressorts couplés



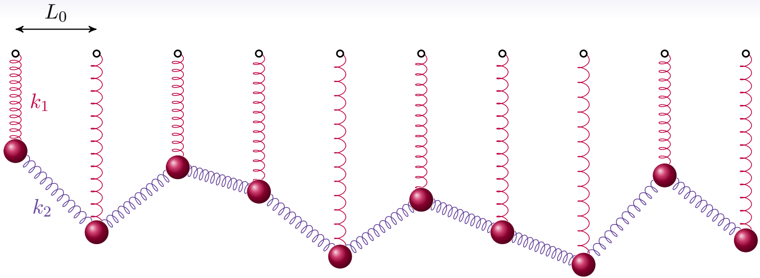
Plusieurs ressorts couplés



X_i : position verticale de la bille numéro i (p.r. à l'équilibre)
Énergie de la chaîne :

$$E = E_0 + \frac{k_1}{2}\left[X_1^2 + \cdots + X_N^2\right] + \frac{k_2}{2}\left[(X_2 - X_1)^2 + \cdots + (X_N - X_{N-1})^2\right]$$

Plusieurs ressorts couplés



X_i : position verticale de la bille numéro i (p.r. à l'équilibre)
Énergie de la chaîne :

$$E = E_0 + \frac{k_1}{2}\left[X_1^2 + \cdots + X_N^2\right] + \frac{k_2}{2}\left[(X_2 - X_1)^2 + \cdots + (X_N - X_{N-1})^2\right]$$

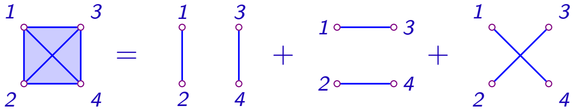
E détermine les covariances des positions X_i et X_j : $C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle$

- $C_{ij} > 0$: X_i et X_j tendent à être de même signe;
- $C_{ij} < 0$: X_i et X_j tendent à être de signe opposé;
- $C_{ij} = 0$: pas de relation particulière entre les signes de X_i et X_j.

Le théorème d'Isserlis et Wick

Théorème

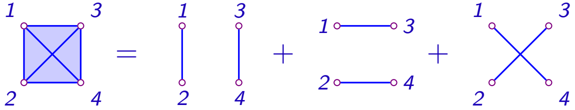
$$\langle X_1 X_2 X_3 X_4 \rangle = \langle X_1 X_2 \rangle \langle X_3 X_4 \rangle + \langle X_1 X_3 \rangle \langle X_2 X_4 \rangle + \langle X_1 X_4 \rangle \langle X_2 X_3 \rangle$$



Le théorème d'Isserlis et Wick

Théorème

$$\langle X_1 X_2 X_3 X_4 \rangle = \langle X_1 X_2 \rangle \langle X_3 X_4 \rangle + \langle X_1 X_3 \rangle \langle X_2 X_4 \rangle + \langle X_1 X_4 \rangle \langle X_2 X_3 \rangle$$



De plus, si N est impair, alors

$$\langle X_1 \dots X_N \rangle = 0$$

alors que si N est pair,

$$\langle X_1 \dots X_N \rangle = \langle X_1 X_2 \rangle \langle X_3 \dots X_N \rangle + \langle X_1 X_3 \rangle \langle X_2 X_4 \dots X_N \rangle + \dots + \langle X_1 X_N \rangle \langle X_2 \dots X_{N-1} \rangle$$

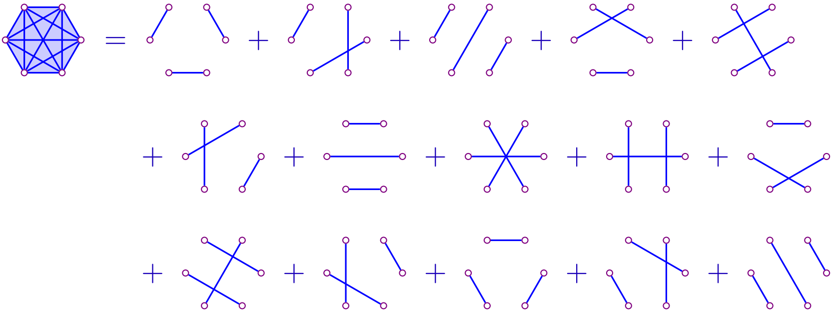
Par récurrence, cela donne une somme sur tous les appariements.

Exemple : $N = 6$

$\langle X_1 \dots X_6 \rangle = ?$

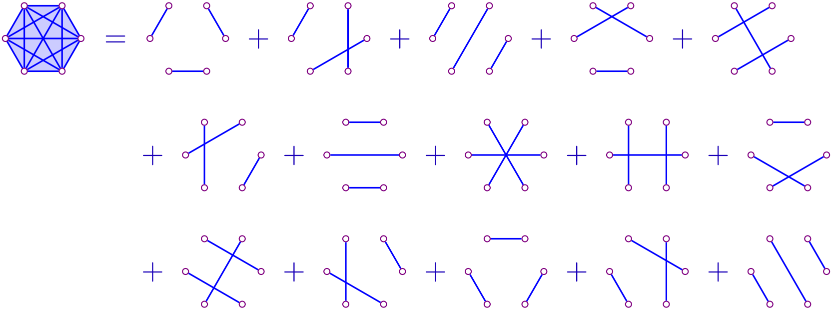
Exemple : $N = 6$

$\langle X_1 \dots X_6 \rangle = ?$



Exemple : $N = 6$

$\langle X_1 \dots X_6 \rangle = ?$



Remarque :

Le résultat reste vrai si certains indices sont les mêmes. Par exemple

$$\langle X_1^{n+1} X_2^m \rangle = n \langle X_1^2 \rangle \langle X_1^{n-1} X_2^m \rangle + m \langle X_1 X_2 \rangle \langle X_1^n X_2^{m-1} \rangle$$

Ressorts non linéaires

On suppose maintenant que l'énergie du $i$ème ressort vertical vaut

$$\frac{k_1}{2}X_i^2 + \frac{a}{4}X_i^4$$

La force du ressort vaut alors $-k_1X_i - aX_i^3$.

Vidéo sur Youtube : https://youtu.be/d1eTOqHX8OQ

Ressorts non linéaires

On suppose maintenant que l'énergie du $i$ème ressort vertical vaut

$$\frac{k_1}{2} X_i^2 + \frac{a}{4} X_i^4$$

La force du ressort vaut alors $-k_1 X_i - a X_i^3$.

But : Calculer les nouvelles covariances $\langle X_i X_j \rangle_a$ en fonction des anciennes $C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle$ (obtenues pour $a = 0$)

Les équations de Schwinger–Dyson

Théorème (Équations de Schwinger–Dyson)

$$\begin{aligned}\langle X_i^{n+1} X_j^m \rangle_a = n C_{ii} \langle X_i^{n-1} X_j^m \rangle_a + m C_{ij} \langle X_i^n X_j^{m-1} \rangle_a \\ - a \Big[C_{i1} \langle X_i^n X_j^m X_1^3 \rangle_a + \cdots + C_{iN} \langle X_i^n X_j^m X_N^3 \rangle_a \Big]\end{aligned}$$

(pour $k_{\mathrm{B}} T = 1$, sinon il faut diviser a par $k_{\mathrm{B}} T$).

Les équations de Schwinger–Dyson

Théorème (Équations de Schwinger–Dyson)

$$\begin{aligned}\langle X_i^{n+1} X_j^m \rangle_a = {} & n C_{ii} \langle X_i^{n-1} X_j^m \rangle_a + m C_{ij} \langle X_i^n X_j^{m-1} \rangle_a \\ & -a \Big[C_{i1} \langle X_i^n X_j^m X_1^3 \rangle_a + \cdots + C_{iN} \langle X_i^n X_j^m X_N^3 \rangle_a \Big]\end{aligned}$$

(pour $k_\mathrm{B} T = 1$, sinon il faut diviser a par $k_\mathrm{B} T$).

Cas $n = 0$, $m = 1$ avec $i = 1$ et $j = 2$:

$$\langle X_1 X_2 \rangle_a = C_{12} - a \big[C_{11} \langle X_2 X_1^3 \rangle_a + \cdots + C_{1N} \langle X_2 X_N^3 \rangle_a \big]$$

Les équations de Schwinger–Dyson

Théorème (Équations de Schwinger–Dyson)

$$\begin{aligned}\langle X_i^{n+1} X_j^m \rangle_a &= nC_{ii} \langle X_i^{n-1} X_j^m \rangle_a + mC_{ij} \langle X_i^n X_j^{m-1} \rangle_a \\ &\qquad -a\Big[C_{i1} \langle X_i^n X_j^m X_1^3 \rangle_a + \cdots + C_{iN} \langle X_i^n X_j^m X_N^3 \rangle_a \Big]\end{aligned}$$

(pour $k_\mathrm{B} T = 1$, sinon il faut diviser a par $k_\mathrm{B} T$).

Cas $n = 0$, $m = 1$ avec $i = 1$ et $j = 2$:

$$\langle X_1 X_2 \rangle_a = C_{12} - a\big[C_{11} \langle X_2 X_1^3 \rangle_a + \cdots + C_{1N} \langle X_2 X_N^3 \rangle_a \big]$$

Cas $n = 0$, $m = 3$:

$$\begin{aligned}\langle X_2 X_i^3 \rangle_a &= 3C_{2i} \langle X_i^2 \rangle_a - a\big[\dots \big] \\ &= 3C_{2i} C_{ii} - a\big[\dots \big]\end{aligned}$$

Les équations de Schwinger–Dyson

Théorème (Équations de Schwinger–Dyson)

$$\begin{aligned}\langle X_i^{n+1} X_j^m \rangle_a = {} & nC_{ii} \langle X_i^{n-1} X_j^m \rangle_a + mC_{ij} \langle X_i^n X_j^{m-1} \rangle_a \\ & -a \Big[C_{i1} \langle X_i^n X_j^m X_1^3 \rangle_a + \cdots + C_{iN} \langle X_i^n X_j^m X_N^3 \rangle_a \Big]\end{aligned}$$

(pour $k_\mathrm{B} T = 1$, sinon il faut diviser a par $k_\mathrm{B} T$).

Cas $n = 0$, $m = 1$ avec $i = 1$ et $j = 2$:

$$\langle X_1 X_2 \rangle_a = C_{12} - a\big[C_{11} \langle X_2 X_1^3 \rangle_a + \cdots + C_{1N} \langle X_2 X_N^3 \rangle_a \big]$$

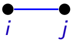
Cas $n = 0$, $m = 3$:

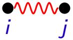
$$\begin{aligned}\langle X_2 X_i^3 \rangle_a &= 3C_{2i} \langle X_i^2 \rangle_a - a[\dots] \\ &= 3C_{2i} C_{ii} - a[\dots]\end{aligned}$$

Par conséquent

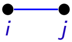
$$\langle X_1 X_2 \rangle_a = C_{12} - 3a\big[C_{11} C_{11} C_{12} + \cdots + C_{1N} C_{NN} C_{N2} \big] + a^2 [\dots]$$

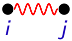
Représentation graphique

$$C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle =$$ 

$$\langle X_i X_j \rangle_a =$$ 

Représentation graphique

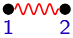
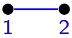
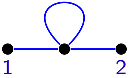
$$C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle =$$ 

$$\langle X_i X_j \rangle_a =$$ 

L'équation

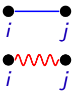
$$\langle X_1 X_2 \rangle_a = C_{12} - 3a\big[C_{11}\,C_{11}\,C_{12} + \cdots + C_{1N}\,C_{NN}\,C_{N2}\big] + a^2\big[\ldots\big]$$

devient

 $=$  $- 3a$  $+ a^2\big[\ldots\big]$

Représentation graphique

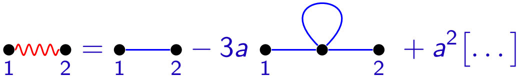
$$C_{ij} = \langle X_i X_j \rangle = \quad \langle X_i X_j \rangle_a =$$



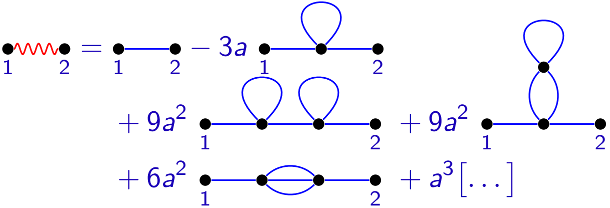
L'équation

$$\langle X_1 X_2 \rangle_a = C_{12} - 3a\big[C_{11}C_{11}C_{12} + \cdots + C_{1N}C_{NN}C_{N2}\big] + a^2[\ldots]$$

devient

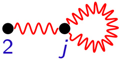
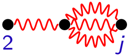
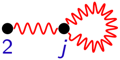


En incluant les termes en a^2 on obtient



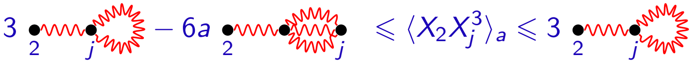
Encadrements

On peut également montrer (mais c'est loin d'être évident !) que

3  $- 6a$  $\leqslant \langle X_2 X_j^3 \rangle_a \leqslant 3$ 

Encadrements

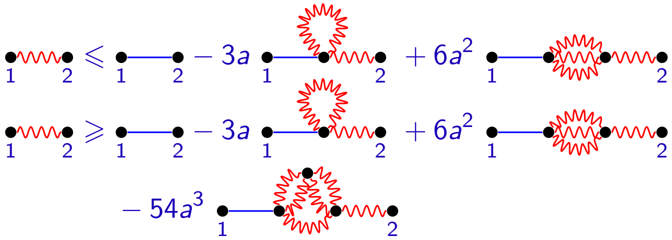
On peut également montrer (mais c'est loin d'être évident !) que



En remplaçant dans

$$\langle X_1 X_2 \rangle_a = C_{12} - a\big[C_{11}\langle X_2 X_1^3\rangle_a + \cdots + C_{1N}\langle X_2 X_N^3\rangle_a\big]$$

cela donne l'encadrement

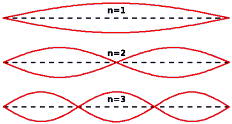


L'électrodynamique quantique (QED)

- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.

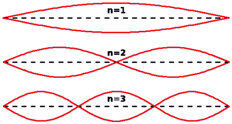
L'électrodynamique quantique (QED)

- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.



L'électrodynamique quantique (QED)

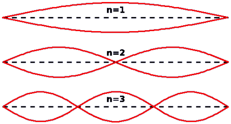
- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.



- La probabilité d'observer un photon au point x au temps t et un photon au point y au temps s s'écrit comme une covariance.

L'électrodynamique quantique (QED)

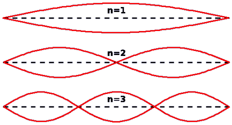
- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.



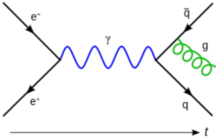
- La probabilité d'observer un photon au point x au temps t et un photon au point y au temps s s'écrit comme une covariance.
- Pour des photons seuls, on peut appliquer le théorème d'Isserlis–Wick. L'interaction avec d'autres particules crée des termes non-linéaires.

L'électrodynamique quantique (QED)

- ▹ Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- ▹ Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d'onde est petite, plus il y a des photons.

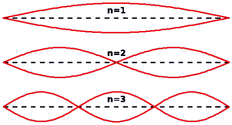


- ▹ La probabilité d'observer un photon au point x au temps t et un photon au point y au temps s s'écrit comme une covariance.
- ▹ Pour des photons seuls, on peut appliquer le théorème d'Isserlis–Wick. L'interaction avec d'autres particules crée des termes non-linéaires.
- ▹ Richard Feynman a inventé une représentation graphique pour calculer une solution approximative sous forme de série : les diagrammes de Feynman.

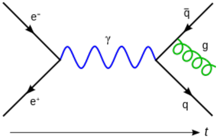


L’électrodynamique quantique (QED)

- Le champ électromagnétique est vu comme un système de ressorts couplés.
- Les photons sont des modes de vibration périodiques ; plus la longueur d’onde est petite, plus il y a des photons.



- La probabilité d’observer un photon au point x au temps t et un photon au point y au temps s s’écrit comme une covariance.
- Pour des photons seuls, on peut appliquer le théorème d’Isserlis–Wick. L’interaction avec d’autres particules crée des termes non-linéaires.
- Richard Feynman a inventé une représentation graphique pour calculer une solution approximative sous forme de série : les diagrammes de Feynman.



- Ces méthodes graphiques sont aujourd’hui utilisées dans de nombreux domaines : théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser, équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS), . . .

Pour en savoir plus

- Articles dans Images des mathématiques :

  http://images.math.cnrs.fr/Les-diagrammes-de-Feynman-1.html

  http://images.math.cnrs.fr/Qu-est-ce-qu-une-Equation-aux.html
- *Quand les maths prennent formes*, Dossier Pour la Science no 91, 2016 :

  https:

  //www.pourlascience.fr/sd/mathematiques/dossier-pour-la-science-91-751.php
- Sur YouTube :

  http://tinyurl.com/q43b6lf
- Cette présentation :

  http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/galois18.pdf

  (et bien entendu sur http://centre-galois.fr)