Exercice 1: «Simplifications scandaleuses »

Un élève a écrit $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$, ce qui est juste mais il explique qu'il a obtenu cette égalité en « simplifiant par 6 » : $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$.

1°) Montrer à l'aide d'un exemple qu'une simplification de ce type n'est pas toujours possible.

2°) Dans cette question, *a*, *b* et *c* sont des nombres entiers pris parmi les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

On précise que la notation $\overline{ab}$ représente l'entier dont l'écriture décimale admet *b* pour chiffre des unités et *a* pour chiffres des dizaines. Autrement dit : $\overline{ab}=b+10a$, la barre placée au dessus des chiffres *a* et *b* permettant d'éviter une éventuelle confusion avec le produit ab.

On se propose de déterminer toutes les fractions du type $\frac{\overline{a\,b}}{\overline{b\,c}}$ où la « simplification scandaleuse » $\frac{\overline{a\,b}}{\overline{b\,c}}=\frac{a}{c}$ est possible.

a) Démontrer que l'on a l'égalité $\frac{\overline{a\,b}}{\overline{b\,c}}=\frac{a}{c}$ si et seulement si $b=\frac{9ac}{10a-c}$.

b) En examinant tous les cas possibles pour les chiffres *a* et *c*, indiquer toutes les fractions du type $\frac{\overline{a\,b}}{\overline{b\,c}}$ où la « simplification scandaleuse » est possible.

Exercice 2: « Accrochez les wagons »

Dans cet exercice, l'unité de masse sera la tonne et l'unité de longueur le mètre.

Un convoi ferroviaire est constitué de N wagons choisis parmi deux types :

- Wagons de type A : longueur 20 , masse totale 60 ;
- Wagons de type B : longueur 30 , masse totale 100.

Un convoi de cinq wagons peut être symbolisé par une écriture du type (A,B,A,A,B), désignant les wagons dans l'ordre du convoi.
Ainsi les deux convois de trois wagons symbolisés par (A,A,B) et (A,B,A) sont considérés comme distincts.
On note L la longueur totale du convoi, **qui ne tient pas compte des espaces entre les wagons, ni des motrices.**

1. On forme un convoi de longueur 310 admettant exactement N wagons.

a. Pour quelle valeur de N ce convoi a-t-il une masse totale maximum ?

b. De combien de façons distinctes peut-on former un convoi répondant aux conditions de la question précédente ?

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de convois distincts de longueur $L = 10 \times n$. Ainsi, u_5 désigne le nombre de convois distincts de longueur 50.

a. Déterminer u_{10}, c'est-à-dire le nombre de convois distincts de longueur 100.

b. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

n	2	3	4	5	6	7
u_n						

c. Calculer u_8 à l'aide du tableau précédent en remarquant que tout convoi de longueur 80 se termine soit par un wagon A, soit par un wagon B.

d. Retrouver la valeur de u_{10}, puis calculer u_{15} et u_{20} .

3. Ecrire un algorithme en langage naturel, permettant de calculer u_n, lorsque l'on saisit une valeur de n.